УДК 519.21

Д. Алимов

Один класс марковских цепей с вложенным случайным блужданием

Пусть ξ_t, $t \geqslant 0$, — однородная целочисленная цепь Маркова с «инфинитезимальными» переходными вероятностями q_{kr}, т. е.

$$P\{\xi_{t+\Delta} = r/\xi_t = k\} = q_{kr}\Delta + 0(\Delta) \quad (k \neq r, \ \Delta \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда

$$P\{\xi_t > 0, \ \xi_{t+0} - \xi_{t-0} > -2, \ t > 0\} = 1$$

и

$$q_{k+1,k} = \nu, \quad q_{kr} = \left(\alpha + \frac{1}{\beta k + \gamma}\right)\lambda_{r-k} \quad (r > k \geqslant 0). \tag{2}$$

Здесь $\nu, \alpha, \beta, \gamma > 0$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geqslant 0$, причем $\sum\limits_1^\infty \lambda_r = -\lambda_0 > 0$.

Все состояния цепи ξ_t сообщаются и, следовательно, либо несущественны, либо возвратно-нулевые, либо эргодические. Во всех случаях пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi_t = k\} = P_k$ $(k \geqslant 0)$ существуют и не зависят от ξ_0, причем в первых двух случаях все $P_k = 0$, а в третьем — все $P_k > 0$. Исследуем условие существования стационарного распределения цепи ξ_t. Используя (1) и (2), для P_k составляем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\nu P_1 + \left(\alpha + \frac{1}{\gamma}\right)\lambda_0 P_0 = 0,$$

$$\nu P_{r+1} - \nu P_r + \sum_{j=0}^{r} P_j\left(\alpha + \frac{1}{\beta j + \gamma}\right)\lambda_{r-j} = 0, \quad r > 0. \tag{3}$$

Для решения системы уравнений (3) введем производящие функции

$$P(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\theta^k, \quad q(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \frac{\theta^k}{\beta k + \gamma}.$$

Согласно (3)

$$\left[\nu\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \alpha\lambda(\theta)\right] P(\theta) = -\lambda(\theta)\, q(\theta) + \nu\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) P_0, \tag{4}$$

где

$$\lambda(\theta) = \sum_0^\infty \lambda_m \theta^m.$$

Поскольку $\beta\theta q'(\theta) = P(\theta) - \gamma q(\theta)$, $q(\theta)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$q'(\theta) = \left[\frac{\tilde{\lambda}(\theta)}{\beta(\nu - \alpha\theta\tilde{\lambda}(\theta))} - \frac{\gamma}{\beta\theta}\right] q(\theta) + \frac{\nu P_0}{\beta\theta(\nu - \alpha\theta\tilde{\lambda}(\theta))}, \tag{5}$$

где

$$\tilde{\lambda}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\theta)}{\theta - 1}, & \text{если} \quad \theta \neq 1, \\ \lambda'(1), & \text{если} \quad \theta = 1. \end{cases}$$

Пусть θ^* — произвольное фиксированное число на (0,1). Тогда решение (5) на $(0, \theta^*)$ можно представить в виде [1]

$$q(\theta) = \theta^{-\gamma/\beta} \exp\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\theta \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\}\left[c(\theta^*) + \frac{\nu P_0}{\beta}\int\limits_{\theta^*}^\theta \frac{u^{\gamma/\beta - 1}}{\nu - \alpha u\tilde{\lambda}(u)} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^u \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\} du\right], \tag{6}$$

где $c(\theta^*)$ — константа, подлежащая определению. Учитывая, что множитель перед квадратной скобкой в (6) стремится к $+\infty$ при $\theta \to 0$, имеем

$$c(\theta^*) = \frac{\nu P_0}{\beta}\int\limits_0^{\theta^*} \frac{u^{\gamma/\beta - 1}}{\nu - \alpha u\tilde{\lambda}(u)} \exp\left\{-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^u \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\} du.$$

Тогда

$$q(\theta) = \frac{\nu P_0}{\beta}\int\limits_0^\theta \left(\frac{u}{\theta}\right)^{\gamma/\beta} \frac{1}{\nu - \alpha u\tilde{\lambda}(u)} \exp\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_u^\theta \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\} \frac{du}{u}. \tag{7}$$

Ввиду того, что θ^* — произвольно фиксировано на интервале (0, 1), равенство (7) имеет место на (0,1). Используя (4), имеем

$$P(\theta) = \frac{\nu P_0}{\nu - \alpha\theta\tilde{\lambda}(\theta)}\left[1 + \frac{\theta\tilde{\lambda}(\theta)}{\beta}\int\limits_0^\theta \left(\frac{u}{\theta}\right)^{\gamma/\beta} \frac{1}{\nu - \alpha u\tilde{\lambda}(u)} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_u^\theta \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\} \frac{du}{u}\right]. \tag{8}$$

Неизвестную вероятность P_0 находим из условия нормировки:

$$P(1) = 1,$$

$$\nu P_0 = \frac{\nu - \alpha\lambda'(1)}{1 + \dfrac{\lambda'(1)}{\beta}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{u^{\gamma/\beta - 1}}{\nu - \alpha u\tilde{\lambda}(u)} \exp\left\{\frac{1}{\beta}\int\limits_u^1 \frac{\tilde{\lambda}(\omega)\,d\omega}{\nu - \alpha\omega\tilde{\lambda}(\omega)}\right\} du}.$$

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы цепь ξ_t имела стационарное распределение вероятностей, необходимо и достаточно выполнения неравенства* $\nu - \alpha\lambda'(1) > 0$.

Теорема 2. *Если* $\alpha = 0$, *то цепь* ξ_t *эргодична тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{1}^{\infty} r\lambda_r < +\infty$.

Утверждение теоремы 2 вполне согласуется с результатами, приведенными в работе [2].

Найдем переходные вероятности $P_{kr}(t) = P\{\xi_{t+s} = r/\xi_t = k\}$ $(s, t > 0;$ $k, r = 0, 1, 2, \ldots)$ в случае $\alpha = 0$, $\beta, \gamma > 0$.

Составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для $P_{kr}(t)$ и перейдем к производящим функциям

$$P_k(t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kr}(t)\,\theta^k, \quad q_k(t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kr}(t)\frac{\theta^k}{\beta k + \gamma}.$$

Учитывая соотношения $\beta\theta \frac{\partial q_k}{\partial \theta} = P_k - \gamma q_k$, получаем (см. [3])

$$\frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \theta} = \left(\frac{\lambda(\theta)}{\beta(\nu + s)(\theta - \theta_0)} - \frac{\gamma}{\beta\theta}\right)\tilde{q}_k + \frac{\theta^{k+1} - \nu(1-\theta)\tilde{P}_{k0}(s)}{\beta(\nu + s)\,\theta(\theta - \theta_0)}, \tag{9}$$

где $\lambda(\theta) = \sum\limits_{0}^{\infty} \lambda_k\theta^k$, $\theta_0 = \theta_0(s) = \frac{\nu}{\nu + s}$, а $\tilde{q}_k(s, \theta)$, $\tilde{P}_{k0}(s)$ — преобразования Лапласа (по t) функций $q_k(t, \theta)$ и $P_{k0}(t)$. С помощью приема, аналогичного использованному в (5) и (6), находим, что

$$\tilde{q}_k(s, \theta) = \frac{\theta_0}{\beta\nu}\int_0^{\theta}\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\gamma/\beta}\frac{u^{k+1} - \nu(1-u)\tilde{P}_{k0}(s)}{u - \theta_0}\exp\left\{\frac{\theta_0}{\beta\nu}\int_u^{\theta}\frac{\lambda(\omega)\,d\omega}{\omega - \theta_0}\right\}\frac{du}{u}. \tag{10}$$

Последнее выражение содержит неизвестную функцию $\tilde{P}_{k0}(s)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть*

$$\lambda(\omega, \theta_0) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\omega) - \lambda(\theta)}{\omega - \theta}, & \text{если } \omega \neq \theta, \\ \lambda'(\omega), & \text{если } \omega = \theta. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда

$$\nu\tilde{P}_{k0}(s) = \frac{\displaystyle\int_0^{\theta_0} u^{\gamma/\beta + k}\exp\left\{\frac{\theta_0}{\beta\nu}\int_u^{\theta_0}\lambda(\omega, \theta_0)\,d\omega\right\}\left(\frac{1}{\theta_0 - u}\right)^{\frac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}+1}du}{\displaystyle\int_0^{\theta_0}(1-u)^{\gamma/\beta}\exp\left\{\frac{\theta_0}{\beta\nu}\int_u^{\theta_0}\lambda(\omega, \theta_0)\,d\omega\right\}\left(\frac{1}{\theta_0 - u}\right)^{\frac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}+1}\frac{du}{u}}. \tag{12}$$

Доказательство. Для определения неизвестного преобразования Лапласа $\tilde{P}_{k0}(s)$, которое содержится в правой части (10), воспользуемся существованием предела

$$\lim_{s \to 0}\int_0^{\theta_0 - \varepsilon} u^{\gamma/\beta}\frac{u^{k+1} - \nu(1-u)\tilde{P}_{k0}(s)}{u - \theta_0}\exp\left\{\frac{\theta_0}{\beta\nu}\int_u^{\theta_0 - \varepsilon}\frac{\lambda(\omega)\,d\omega}{\omega - \theta_0}\right\}\frac{du}{u}, \tag{13}$$

вытекающего из аналитичности $\tilde{q}_k(s, \theta)$ в области $\{s: \mathrm{Re}\, s > 0\} \times \{\theta: |\theta| \leqslant 1\}$. Учитывая (11), интеграл, фигурирующий в (13), можно представить в виде

$$\varepsilon^{\frac{\theta_0 \lambda(\theta_0)}{\beta\nu}} \left[\int_0^{\theta_0 - \varepsilon} u^{\gamma/\beta} (\nu(1-u) \tilde{P}_{k0}(s) - u^{k+1}) \exp\left\{ \frac{\theta_0}{\beta\nu} \int_u^{\theta_0 - \varepsilon} \lambda(\omega, \theta_0)\, d\omega \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{\theta_0 - u} \right)^{\frac{\theta_0 \lambda(\theta_0)}{\beta\nu} + 1} \frac{du}{u} \right].$$

Так как $\lambda(\theta_0) < 0$, то множитель перед квадратными скобками стремится к $+\infty$, если $\varepsilon \to 0$, и поэтому выражение в квадратных скобках должно стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, неизвестное $\tilde{P}_{k0}(s)$ будет определяться равенством (12). Теорема доказана.

В заключение приведем доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha = 0$. *Если* $\lambda^{(r)}(1) < +\infty$, *а* $\lambda^{(r+1)}(1) = +\infty$, *то стационарное распределение* $\{P_k, k \geqslant 0\}$ *цепи* ξ_t, $t \geqslant 0$, *имеет ровно* $r - 1$ *моментов. Условия*

$$\sum_1^\infty \lambda_r \ln r < +\infty, \quad \lambda'(1) = +\infty$$

достаточны для того, чтобы все состояния цепи ξ_t, $t \geqslant 0$, *были возвратно-нулевыми.*

Доказательство. Для нахождения r-го момента стационарного распределения необходимо вычислить $P^{(r)}(1)$, где $P(\theta)$ определяется из (8) при $\alpha = 0$. Вычисляя производную r-го порядка от $P(\theta)$ в (1), видим, что для того чтобы она была конечной, необходима конечность $\lambda^{(r)}(\theta, 1)$ при $\theta = 1$. Но $\lambda^{(r)}(\theta, 1)|_{\theta=1} = \frac{1}{2} \lambda^{(r+1)}(1)$.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, достаточно показать [4], что $\lim_{s \to 0} \tilde{P}_{00}(s) = \infty$, а это означает, что состояние 0, а вместе с ним и все другие — возвратные. Прежде всего заметим, что сходимость ряда $\sum_1^\infty \lambda_r \ln r$ равносильна существованию конечного предела

$$A = \lim_{s \to 0} \exp\left\{ \frac{\theta_0}{\beta\nu} \int_0^1 \lambda(\omega, \theta_0)\, d\omega \right\} > 1.$$

В самом деле, если $s \to 0$, то $\theta_0 \to 1$, поэтому A конечно вместе с

$$\int_0^1 \lambda(\omega, 1)\, d\omega = \int_0^1 \frac{\lambda(\omega)}{\omega - 1}\, d\omega = \sum_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right) \lambda_k =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty (\ln k + C + 0(1)) \lambda_k.$$

Здесь C — постоянная Эйлера.

Пусть δ — фиксированное число на (0, 1) и s столь мало, что $\theta_0 > \delta$, $\frac{\theta_0 \lambda(\theta_0)}{\beta\nu} + 1 > 0$. Тогда можно показать, что числитель в (12) оценивается снизу выражением $-\delta^{\gamma/\beta+k}\dfrac{\beta\nu}{\theta_0\lambda(\theta_0)}\left(\dfrac{1}{\theta_0-\delta}\right)^{\frac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}}$, а знаменатель допускает оценку сверху $\dfrac{A}{\delta}\left[\theta_0-\delta-(1-\theta_0)\dfrac{\beta\nu}{\theta_0\lambda(\theta_0)}\left(\dfrac{1}{\theta_0-\delta}\right)^{\frac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}}\right]$. Поэтому

$$\nu\widetilde{P}_{00}(s)>\frac{1}{A}\,\frac{\delta^{\gamma/\beta+1}}{1-\theta_0-\dfrac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}(\theta_0-\delta)^{\frac{\theta_0\lambda(\theta_0)}{\beta\nu}+1}}\to\infty$$

при $s\to 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1959.— 468 с.
2. Нисанова Э. С., Олийнык И. Д. Об эргодичности одного класса марковских цепей с «отражающим экраном» на бесконечности.— В кн.: Исследования по теории случайных процессов. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 127—129.
3. Алимов Д. Об одном классе однородных цепей Маркова с отражением на бесконечности.— В кн.: Аналитические методы в теории вероятностей. Киев: Наук. думка, 1979, с. 102—103.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1967.— 498 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.VI 1979 г.