УДК 517.5

В. Т. Гаврилюк

Приближение в метрике L суммируемых периодических функций суммами Фурье

Обозначим через C пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$ и модулем непрерывности $\omega(f, \delta) = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} |f(x+h) - f(x)|$, через L — пространство суммируемых 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$ и интегральным модулем непрерывности $\omega(f, \delta)_L = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx$.

Пусть $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)$ — ряд Фурье функции $f(x)$ и $S_n = S_n(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k(x)$ — ее суммы Фурье.

Каждая треугольная матрица чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $n = 0, 1, \ldots$ определяет линейный метод приближения функций $U(\Lambda)$, для которого

$$U_n = U_n(f, x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(t-x)\, dt,$$

где $K_n(t) = K_n(t; \Lambda) + \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kt$ — ядро U_n. В дальнейшем будем рассматривать методы с $\lambda_0^{(n)} = 1$. Через $\| U_n \|$ обозначим нормы U_n как операторов из C в C.

Начиная с Лебега [1] многие авторы устанавливали оценки вида $\| f - U_n(f) \| \leqslant B_n \omega(f, \gamma_n)$, где $B_n = B(U_n, \gamma_n) > 0$, $\gamma_n > 0$.

Задача состоит в том, чтобы для каждого конкретного $\gamma > 0$ найти величину

$$B^*(U_n, \gamma) = \sup_{\substack{f \in C \\ f \neq \text{const}}} \| f - U_n(f) \| / \omega(f, \gamma), \quad n = 0, 1, \dots .$$

В работе [2] доказано, что для любого линейного метода и произвольного $\gamma > 0$

$$B^*(U_n, \gamma) \geqslant (\| U_n \| + 1)/2, \tag{1}$$

а для сумм Фавара $\theta_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} A_k(x)$ справедлива оценка $\| f - \theta_n(f) \| \leqslant 1/2 (\| \theta_n \| + 1)\, \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $B^*(\theta_n, \gamma) = (\| \theta_n \| + 1)/2$ при $\gamma \geqslant \pi/n$. Положим

$$\gamma^*(U_n) = \inf \{\gamma > 0 \mid B^*(U_n, \gamma) = (\| U_n \| + 1)/2\}, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{2}$$

Известно [3, теоремы 1 и 2], что

$$B^*\left(S_n, \frac{2\pi}{3(n + 1/2)}\right) = (\| S_n \| + 1)/2 \tag{3}$$

и

$$\gamma^*(S_n) = \frac{2\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В настоящей работе доказывается справедливость в метрике L соотношений, аналогичных (1) и (3). Справедлива следующая лемма.

Л е м м а. *Для любого линейного метода $U(\Lambda)$ с $\lambda_0^{(n)} = 1$ и произвольного $\gamma > 0$ имеет место неравенство*

$$B^*(U_n, \gamma)_L \sup_{\substack{f \in L \\ f \neq \text{const}}} \frac{\| f - U_n(f) \|_L}{\omega(f, \gamma)_L} \geqslant (\| U_n \| + 1)/2. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко показать, что

$$B^*(U_n, \gamma)_L = \sup_{f \in \tilde{L}(\gamma)} \| f - U_n(f) \|_L,$$

где $\tilde{L}(\gamma)$ — множество функций $f \in L$, для которых выполняется условие

$$\omega(f, \gamma)_L = 1. \tag{5}$$

Для доказательства неравенства (1) при каждом произвольно малом $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \gamma)$ определим 2π-периодическую функцию $f_\varepsilon(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < x < 2\pi, \\ f_\varepsilon(x + 2\pi) = f_\varepsilon(x). \end{cases}$$

Легко проверить, что $f_\varepsilon(x) \in \tilde{L}(\gamma)$.

Предположим, что $U(\Lambda)$ — положительный линейный метод, т. е. $K_n(t) = K_n(t; \Lambda) \geqslant 0$. В этом случае имеем

$$\| f_\varepsilon - U_n(f_\varepsilon) \|_L = I_n(f_\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f_\varepsilon(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(x+t) K_n(t)\, dt \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx, \qquad (6)$$

где

$$\varphi_\varepsilon(t, x) = f_\varepsilon(x+t) + f_\varepsilon(x-t) - 2 f_\varepsilon(x).$$

Оценим $I_n(f_\varepsilon)$ снизу.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \left| \int_0^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - 2 \int_{\varepsilon}^{\pi} f_\varepsilon(x) K_n(t)\, dt \right| dx + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \int_0^{\pi} f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt dx. \qquad (7)$$

Поскольку $\varphi_\varepsilon(t, x) \leqslant 0$ при $0 \leqslant t,\ x \leqslant \varepsilon$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \left| \int_0^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt - 2 \int_{\varepsilon}^{\pi} f_\varepsilon(x) K_n(t)\, dt \right| dx \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t)\, dt \int_0^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t, x)\, dx \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)\, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t)\, dt; \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \int_0^{\pi} f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt dx = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} K_n(t) \int_t^{\varepsilon + t} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t) \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + t} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} K_n(t) \int_{t - \varepsilon}^{\pi} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} K_n(t)\, dt; \qquad (9)$$

Далее имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left| \int_0^{\pi} \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f_\varepsilon(t - x) K_n(t)\, dt dx = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) \int_{t - \varepsilon}^{t} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t) \int_0^{t} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t)\, dt. \qquad (10)$$

Из соотношений (6) — (10) в случае $K_n(t) \geqslant 0$ получаем

$$B^*(U_n, \gamma)_L \geqslant \| f_\varepsilon - U_n(f_\varepsilon) \|_L \geqslant \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi - \int_0^\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \right) K_n(t)\, dt.$$

Ввиду суммируемости $K_n(t)$ и произвольно малого $\varepsilon > 0$ отсюда следует

$$B^*(U_n, \gamma)_L \geqslant 1 = (\| U_n \| + 1)/2.$$

Пусть $U(\Lambda)$ не является положительным линейным методом и $\{t_k\}_{k=1}^s$, $0 < t_1 < \ldots < t_s < \pi$, $s \leqslant n$ — точки, в которых $K_n(t)$ меняет знак. Положим еще $t_0 = 0$, $t_{s+1} = \pi$. Тогда

$$I_n(f_\varepsilon) = \| f_\varepsilon - U_n(f_\varepsilon) \|_L = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{s} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=s}^{0} \int_{-t_{k+1}}^{-t_k} \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx. \tag{11}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{t_1} \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{t_1} \left| \int_0^{t_1} f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt \right| dx = \frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^\pi K_n(t) \int_0^\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon K_n(t) \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dx dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon K_n(t) \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{t_1-\varepsilon} K_n(t) \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} K_n(t) \int_t^{t_1} \frac{1}{2\varepsilon}\, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} K_n(t)\, dt - \frac{3}{2\pi} \int_0^\varepsilon K_n(t)\, dt - \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} K_n(t)\, dt. \tag{12}$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_0^\pi \varphi_\varepsilon(t, x) K_n(t)\, dt \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_0^\pi f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k} f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_\varepsilon(x - t) K_n(t)\, dt \right| dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |K_n(t)|\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k} |K_n(t)|\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{t_{k+1}-\varepsilon}^{t_{k+1}} |K_n(t)|\, dt \quad (k \geqslant 1); \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-t_{k+1}}^{-t_k}\left|\int\limits_0^{\pi}\varphi_\varepsilon(t,x)K_n(t)\,dt\right|dx \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|K_n(t)|\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+1}+\varepsilon}|K_n(t)|\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_k}^{t_k+\varepsilon}|K_n(t)|\,dt \quad (k\geqslant 0). \tag{14}$$

Из соотношений (11) — (14) следует

$$I_n(f_\varepsilon)\geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|K_n(t)|\,dt-\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon}K_n(t)\,dt-\sum_{k=1}^{s+1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon}|K_n(t)|\,dt=$$

$$=(\|U_n\|+1)/2-\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon}K_n(t)\,dt-\sum_{k=1}^{s+1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon}|K_n(t)|\,dt. \tag{15}$$

При каждом фиксированном n для произвольного ε_1 найдется такое $\varepsilon=\varepsilon(\varepsilon_1,n)$, при котором будет выполняться неравенство $\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon}K_n(t)+$ $+\sum\limits_{k=1}^{s+1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon}|K_n(t)|\,dt\leqslant\varepsilon_1$, что вместе с соотношением (15) доказывает справедливость леммы.

Теорема. *Для сумм Фурье справедливо равенство*

$$B^*\left(S_n,\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)_L=\sup_{\substack{f\in L\\ f\neq \mathrm{const}}}\frac{\|f-S_n(f)\|_L}{\omega\left(f,\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)_L}=(\|S_n\|+1)/2. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что

$$B^*\left(S_n,\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)_L=\sup_{f\in\widetilde{L}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)}\|f-S_n(f)\|_L, \tag{17}$$

где $\widetilde{L}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)$ — класс функций $f\in L$, для которых $\omega\left(f,\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)_L=1$.

Согласно работе [4, теорема 1] при произвольном модуле непрерывности $\omega(t)$ справедливо неравенство

$$\sup_{f\in H_L^{\omega}}\|f-S_n(f)\|_L\leqslant\sup_{f\in H_C^{\omega}}\|f-S_n(f)\|, \tag{18}$$

где

$$H_X^{\omega}=\{f\in X:\|f(x+t)-f(x)\|_X\leqslant\omega(t)\}\quad (X \text{ есть } C \text{ или } L).$$

Класс функций H_X^{ω} при выполнении условия $\omega\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)=1$ обозначим через $H_X^{\omega}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)$.

Из теоремы 1 работы [3] следует

$$\sup_{f \in H_C^{\omega}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)} \| f - S_n(f) \| \leqslant (\| S_n \| + 1)/2. \tag{19}$$

Следовательно, учитывая соотношения (18), получаем

$$\sup_{f \in H_L^{\omega}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)} \| f - S_n(f) \|_L \leqslant (\| S_n \| + 1)/2,$$

$$\sup_{f \in \widetilde{L}\left(\frac{2\pi}{3(n+1/2)}\right)} \| f - S_n(f) \|_L \leqslant (\| S_n \| + 1)/2. \tag{20}$$

Из соотношений (16), (20) и (4) следует справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz.— Bull. Soc. Math. France, 1910, 38, № 3, p. 184—210.
2. Стечкин С. Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1971, **109**, с. 26—34.
3. Гаврилюк В. Т., Стечкин С. Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье.— ДАН СССР, 1978, **241**, №3, с. 525—527.
4. Моторный В. П. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем.— Мат. заметки, 1974, **16**, вып. 1, с. 15—26.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
21.IX 1978 г.