УДК 517.54

Ф. М. Диаб

Об условиях существования полного дифференциала произвольной непрерывной функции

Рассмотрим некоторое непрерывное отображение $W = f(z)$ области D плоскости z в плоскость w. Для произвольной точки $z_0 \in D$ возьмем окружность $C(z_0, r) : |z - z_0| = r$ и положим

$$H(z_0, r) = \frac{\max\limits_{|z'-z|=r} |f(z') - f(z_0)|}{\min\limits_{|z''-z|=r} |f(z'') - f(z_0)|}.$$

Будем рассматривать лишь такие непрерывные функции $f(z)$, для которых $H(z, r)$ всегда имеет смысл (начиная с некоторого $r > 0$). Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть в области D задано произвольное непрерывное отображение $W = f(z)$. Если величина $H(z, r)$ имеет смысл и $\overline{\lim\limits_{r \to 0}} H(z, r) < \infty$ (при достаточно малых r) в каждой точке z, то существует всюду плотное в D открытое множество, в каждой компоненте которого функция $f(z)$ почти всюду имеет полный дифференциал.*

Доказательство. Покажем, что каждое из множеств $F_n = \left\{ z : z \in D, H(z, r) \leqslant n \ \forall r : 0 < r \leqslant \frac{1}{n} \right\}$ — замкнуто в D.

Пусть $z_k \in F_n$ и $z_k \to z_0 \in D$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Возьмем на окружности $C(z_0, r): |z - z_0| = r$ $\left(0 < r \leqslant \frac{1}{n}\right)$ радиуса r две произвольные точки: z', z''. На окружностях $C(z_k, r)$ того же радиуса выберем по две точки z'_k, z''_k так, чтобы $z'_k \to z'$ и $z''_k \to z''$. Тогда

$$\left| \frac{f(z'_k) - f(z_k)}{f(z''_k) - f(z_k)} \right| \leqslant n \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если бы имело место равенство $f(z'') = f(z_0)$, то, переходя в полученных неравенствах к пределу, мы получили бы, что и $f(z') = f(z_0)$, т. е. на окружности $C(z_0, r)$ функция $f(z)$ принимала бы одно и то же значение $f(z_0)$. Так как для всех точек $z \in D$ величина $H(z, r)$ (при достаточно малых r) имеет смысл, то на окружности $C(z_0, r)$ найдется точка $\tilde{z}$, для которой $H(\tilde{z}, r)$ имеет смысл и конечна. Но этого не может быть, так как в любой окружности $\tilde{z}$ находятся точки окружности $C(z_0, r)$, а в них значения функции $f(z) = f(z_0)$. Поэтому должно быть $f(z'') \neq f(z)$. В предыдущих неравенствах возможен предельный переход при $k \to \infty$. Получаем

$$\left| \frac{f(z') - f(z_0)}{f(z'') - f(z_0)} \right| \leqslant n,$$

т. е. $H(z_0, r)$ имеет смысл и не превосходит n, что и требовалось доказать. Очевидно, что $D = \bigcup\limits_n F_n$.

Приведем известные определения [1, 2].

Определение 1. Непрерывное отображение $W = f(z)$ области D называется внутренним, если существует такая триангуляция области D, что непрерывное отображение $W = f(z)$ гомеоморфно в каждом треугольнике, а также в окрестности каждой его граничной точки, исключая, быть может, вершины треугольника.

Определение 2. Непрерывное отображение f некоторой области D плоскости z в плоскость w называется нульмерным в точке $z \in D$, если точка z — компонента прообраза $f^{-1}(f(z))$. Если z — изолированная точка этого прообраза, то f называется изолированным в точке z. Наконец, если f нульмерно (изолировано) в каждой точке D, назовем его нульмерным (изолированным) в области D. Очевидно, если f нульмерно (изолировано) в D, то прообраз любой точки $w \in f(D)$ есть замкнутое в D нульмерное (изолированное) множество, и наоборот.

Ясно, что изолированное отображение f нульмерно.

Из условия $H(z, r) \leqslant n$ $\forall r \leqslant \frac{1}{n}$ на множество $F_0 \subset D$ следует, что отображение f изолировано на F_n и, следовательно, нульмерно на нем. Возьмем произвольный шар $\bar{d} \subset D$, тогда $\bar{d} = \bigcup\limits_n (F_n \cap \bar{d})$. Это значит, что одно из множеств $F_N \cap \bar{d}$. Допустим, что $F_N \cap \bar{d}$ будет где-то плотным в d и, следовательно, найдется круг $d' \subset d$, в каждой точке которого отображение f нульмерно, $\overline{d'}$ представляется в виде $\overline{d'} = \bigcup\limits_n (F_n \cap \bar{d}')$.

Исходя из леммы статьи [3] в наших условиях можно положить $E = \bar{d}'$. Применив теорему из [3] (как и при доказательстве теоремы 1 можем считать компоненты O максимальными по отношению к свойству f быть внутренним отображением), получим, что существует всюду плотное в $\bar{d}'$ открытое множество O', в каждой компоненте которого отображение f внутреннее согласно определению внутреннего отображения, в каждой компоненте множества O' найдется такая триангуляция, что отображение $W = f(z)$ гомеоморфно на произвольной порции P' этой компоненты, не содержащей вершины треугольников триангуляции. Тогда на P' функция $W = f(z)$ однолистная и $P' \subset O' \subset F_N$. Требуется доказать, что функция $f(z)$ почти всюду на P' имеет полный дифференциал.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а [4]. *Пусть в области D плоскости z задана непрерывная функция $f(z)$. Чтобы $f(z)$ имела полный дифференциал почти всюду на некотором множестве $E \subset D$, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на E выполнялось соотношение* $\overline{\lim\limits_{\Delta z \to 0}} \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} \right| < \infty$.

В силу этой теоремы нужно убедиться, что полученное неравенство справедливо для почти всех точек множества P'. Как и в доказательстве леммы 20 из работы [1], получим, что функция $f(z)$ почти всюду на P' имеет полный дифференциал. Из произвольности порции P' следует, что функция $f(z)$ имеет полный дифференциал почти всюду на каждой компоненте множества O'. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т р о х и м ч у к Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности.— М., 1963.
2. Т р о х и м ч у к Ю. Ю. О непрерывных отображениях областей евклидова пространства.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, №2 с. 196—211.
3. Т р о х и м ч у к Ю. Ю., Б о н д а р ь А. В. О локальной степени нульмерного отображения.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. Вып. 1.— Киев. Наук. думка, 1969.
4. Stepanof W. Sur les conditions de l'existence de la differentiell totale.— .— Мат. сб., 1925, **32**, p. 323—370.

АРЕ

Поступила в редакцию
10.II 1978 г.