УДК 519.21

М. Е. Зюков

Предельная теорема для случайных блужданий с ограниченными в одну сторону скачками

В данной работе предельная теорема для н епрерывных снизу случайных блужданий, подчиненных условию положительности, доказанная в [1], распространяется на случай блужданий с ограниченными снизу скачками.

Такого типа теоремы рассматривались, например, в [2]. Отличие настоящей работы состоит в том, что в явном виде находятся переходные вероятности однородного марковского процесса, каковым является случайное блуждание, подчиненное условию положительности, и уже для него доказывается предельная теорема.

1. Пусть α_t, $t \geqslant 0$, —однородный непрерывный справа случайный процесс с независимыми приращениями с фазовым пространством $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ и производящей функцией

$$M\theta^{\alpha_t - \alpha_0} = e^{ta(\theta)}, \quad t \geqslant 0, \quad 0 < \theta \leqslant 1,$$

где $a(\theta) = \sum\limits_{k=-c}^{\infty} a_k \theta^k$, $c > 0$, $a_{-c} > 0$, $a_0 < 0$, $a_k \geqslant 0$, $k > -c$; $a(1) = 0$.

Рассмотрим функционалы на траекториях процесса α_t:

$$\tau_k = \inf\{t : \alpha_t - \alpha_0 \leqslant -k\}, \quad k \geqslant 0,$$

если $\alpha_t - \alpha_0 > -k$ для всех $t \geqslant 0$, то, по определению, $\tau_k = \infty$. На множестве траекторий, для которых $\tau_k < \infty$, определим $T_k = -k - (\alpha_{\tau_k} - \alpha_0)$.

Для нахождения совместного распределения τ_k и T_k рассмотрим вложенную цепь Маркова η_n, $n \geqslant 0$, процесса $\alpha_t - \alpha_0$, $t \geqslant 0$. Очевидно, η_n — случайное блуждание с ограниченными снизу скачками, причем производящая функция величины скачка имеет вид $p(\theta) = 1 - \dfrac{a(\theta)}{a_0}$, $0 < \theta \leqslant 1$.

На траекториях η_n определяем функционалы

$$\tau_k^* = \inf\{n : \eta_n \leqslant -k\}, \quad k \geqslant 0, \quad T_k^* = -k - \eta_{\tau_k^*}, \quad \text{если } \tau_k^* < \infty.$$

Из результатов [3] следует, что

$$M(z^{\tau_k^*};\ T_k^* = 0) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(n_i - 1)!} \left(\frac{\mu^{k+c-1}}{\psi_i(\mu)}\right)^{(n_i-1)}_{\mu=\mu_i(z)}. \tag{1}$$

Если $1 \leqslant l \leqslant c-1$, то

$$M(z^{\tau_k^*};\ T_k^* = l) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(n_i - 1)!} \left(\frac{\sum\limits_{j=l}^{c-1} \varphi_j(z)\, \mu^{k+c+l-j-2}}{\psi_i(\mu)}\right)^{(n_i-1)}_{\mu=\mu_i(z)}, \tag{2}$$

где $\mu_i(z)$ — корни уравнения $1 - zp(\mu) = 0$, $0 < z < 1$, в круге $|\mu| < 1$ кратности n_i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$ $(n_1 + \ldots + n_\nu = c)$, $\varphi_j(z)$, $0 \leqslant j \leqslant c-1$ с точностью до знака — элементарные симметрические функции этих корней, $\psi_i(\mu) = \prod\limits_{j \neq i} (\mu - \mu_j(z))^{n_j}$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$.

Так как $\tau_k = \sum\limits_{i=1}^{\tau_k^*} \zeta_i$, где ζ_i, $i \geqslant 1$, — независимые показательно распределенные с параметром $-a_0$ случайные величины, то используя (1) и (2), легко подсчитать, что

$$M(e^{-s\tau_k};\ \tau_k < \infty) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu} (1 - \lambda_j(s))^{n_j}}{(n_i - 1)!} \left(\frac{\lambda^{k+c-1}}{(1-\lambda)\,\psi_i(\lambda)}\right)^{(n_i-1)}_{\lambda=\lambda_i(s)}, \quad s > 0, \tag{3}$$

а $M(e^{-s\tau_k};\ T_k = l)$, $0 \leqslant l \leqslant c-1$, имеют вид (1) и (2), где $\mu_i(z)$ заменены на $\lambda_i(s)$ — корни уравнения

$$a(\lambda) = s, \quad s > 0, \tag{4}$$

в круге $|\lambda| < 1$.

2. Обозначим исходный процесс α_t, $t \geqslant 0$, с поглощающим экраном в нуле через β_t, $t \geqslant 0$, т. е., если $\beta_0 = k > 0$, то

$$\beta_t - \beta_0 = \begin{cases} \alpha_t - \alpha_0, & t < \tau_k, \\ -k, & t \geqslant \tau_k. \end{cases}$$

Очевидно β_t — однородная цепь Маркова с поглощением в нуле. Обозначим ее переходные вероятности $\beta_{kr}(t)$, $k, r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

Пусть $\beta_0 = k > 0$; положим

$$\varphi_k(t, \theta) = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_{kr}(t)\,\theta^r, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Используя строгую марковость процесса α_t легко показать, что

$$\varphi_k(t, \theta) = \theta^k e^{ta(\theta)} - \sum_{j=0}^{c-1} \theta^{-j} \int_0^t e^{(t-u)a(\theta)} P\{\tau_k \in du;\ T_k = j\}. \tag{5}$$

Из (5), учитывая вид $M(e^{-s\tau k};\ T_k = j)$, $0 \leqslant j \leqslant c-1$, имеем

$$\tilde{\varphi}_k(s, \theta) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_k(t, \theta)\, dt =$$

$$= \left[\theta^k - \theta^{1-c} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu} (1-\lambda_j(s))^{n_j}}{(n_i-1)!} \left(\frac{\lambda^{k+c-1}}{(\theta-\lambda)\,\psi_i(\lambda)}\right)^{(n_i-1)}_{\lambda=\lambda_i(s)}\right] (s - a(\theta))^{-1}. \tag{6}$$

Обозначим $A_t = \{\alpha_u > 0,\ u \leqslant t\}$, $t > 0$. Рассмотрим процесс $\alpha_u(A_t)$, $u \leqslant t$ (по поводу обозначений и определения этого процесса смотри [1]). Поступая так же, как в упомянутой работе, можно показать, что для фиксированного $t > 0$ $\alpha_u(A_t)$, $u \leqslant t$ — цепь Маркова в фазовом пространстве $\{1, 2, \ldots\}$ с переходной вероятностью

$$P\{\alpha_u(A_t) = r / \alpha_v(A_t) = k\} = \frac{P\{\tau_r > t-u\}}{P\{\tau_k > t-v\}}\, \beta_{kr}(u-v),$$

где $0 \leqslant v \leqslant u \leqslant t$; $k, r > 0$.

Лемма. *Если наибольший общий делитель тех k, для которых $a_k > 0$, равен 1, $a'(1) = 0$ и $a(\theta) \sim C(1-\theta)^{\alpha}$ при $\theta \to 1-0$, $1 < \alpha \leqslant 2$, $C \neq 0$, то для любого $z \geqslant 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P\{\tau_r > t\}}{P\{\tau_k > t+z\}} = \frac{q_r}{q_k}, \quad k, r > 0,$$

где

$$q_k = k + c - 1 - \sum_{i=2}^{\nu} \left\{ \frac{n_i}{1-\lambda_i(0)} + \frac{\prod\limits_{j=2}^{\nu} (1-\lambda_j(0))^{n_j}}{(n_i-1)!} \sum_{m=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^m \sum_{n=0}^{m} C_m^n \times\right.$$

$$\left. \times \prod_{p=0}^{m-1-n} (k-p) \prod_{q=0}^{n-1} (c-1-q)\, \lambda_i^{k+c-1-m}(0)\, u_i^{(n_i-1-m)}(\lambda_i(0)) \right\},$$

$u_i(\lambda) = [(1-\lambda)\,\psi_i(\lambda)]^{-1}$, $\lambda_i(0)$, $2 \leqslant i \leqslant \nu$ — *корни уравнения* $a(\lambda) = 0$ *в круге* $|\lambda| < 1$ *кратности* n_i $(n_1 + \ldots + n_\nu = c-1)$.

Доказательство. В [3] установлено, что при $s > 0$ уравнение (4) имеет в круге $|\lambda| < 1$ простой действительный положительный корень $\lambda_1(s)$, причем модули всех остальных корней (4) в этом круге меньше $\lambda_1(s)$.

Из условия леммы следует, что при $s \to 0$

$$1 - \lambda_1(s) \sim \left(\frac{s}{C}\right)^{1/\alpha}. \tag{7}$$

Из (3), учитывая (7), имеем $\int\limits_0^\infty e^{-st} P\{\tau_k > t\}\, dt \sim q_k C^{-1/\alpha} s^{1/\alpha - 1}$ при $s \to 0$

и по тауберовой теореме [4]

$$P\{\tau_k > t\} \sim \frac{q_k C^{-1/\alpha}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} t^{-1/\alpha} \text{ при } t \to \infty,$$

что доказывает лемму.

Обозначим $\alpha^*_{kr}(t) = \frac{q_r}{q_k} \beta_{kr}(t)$, $k, r > 0$, $t \geqslant 0$. Очевидно, $\alpha^*_{kr}(t)$ — переходные вероятности однородной цепи Маркова α^*_t, $t \geqslant 0$, в фазовом пространстве $\{1, 2, \ldots\}$. Поэтому справедлива теорема.

Теорема 1. *В условиях леммы переходные вероятности цепи Маркова $\alpha_u(A_t)$, $u \leqslant t$, при $t \to \infty$ сходятся к переходным вероятностям однородной цепи Маркова α^*_u, $u \geqslant 0$, с переходными вероятностями $\alpha^*_{kr}(u)$.*

Ясно, что процесс α^*_u, $u \geqslant 0$, следует интерпретировать как $\alpha_u(A)$, $u \geqslant 0$, где $A = \{\alpha_u > 0,\ u \geqslant 0\}$. Следует отметить, что в нашем случае $P\{\tau_k < \infty\} = 1$, $k \geqslant 0$, и, стало быть, $P(A) = 0$.

3. Пусть $\alpha^*_0 = k > 0$; обозначим $\varphi^*_k(t, \theta) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \alpha^*_{kr}(t)\, \theta^r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Из вида $\alpha^*_{kr}(t)$ имеем

$$\tilde{\varphi}^*_k(s, \theta) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \varphi_k(t, \theta)\, dt = \frac{1}{q_k}\left[\theta \frac{\partial \tilde{\varphi}_k(s, \theta)}{\partial \theta} + \right.$$

$$+ \left(c - 1 - \sum_{i=2}^{\nu} \frac{n_i}{1 - \lambda_i(0)}\right) \tilde{\varphi}_k(s, \theta) -$$

$$- \prod_{j=2}^{\nu} (1 - \lambda_j(0))^{n_j} \sum_{i=2}^{\nu} \frac{1}{(n_i - 1)!} \sum_{m=0}^{n_i - 1} C^m_{n_i - 1} \sum_{n=0}^{m} C^n_m \prod_{q=0}^{n-1} (c - 1 - q) \times$$

$$\left. \times u_i^{(n_i - 1 - m)}(\lambda_i(0))\, \lambda_i^{c-1-m}(0)\, \theta^{m-n} \frac{\partial^{(m-n)} \tilde{\varphi}_k(s, \lambda_i(0)\theta)}{\partial \theta^{m-n}}\right],$$

где $\tilde{\varphi}_k(s, \theta)$ определяется по формулам (6).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\alpha^*_0 = [x\sigma\sqrt{n}]$, $x > 0$, $M\alpha_1 = 0$, $D\alpha_1 = \sigma^2$ $(0 < \sigma < \infty)$, то конечномерные распределения процессов $\eta_n(t) = \frac{\alpha^*_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}$, $t \geqslant 0$, сходятся к конечномерным распределениям процесса w^*_t, $t \geqslant 0$, двойное преобразование Лапласа которого имеет вид*

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} M_x e^{-\lambda w^*_t}\, dt = \frac{e^{-\lambda x}}{s - \frac{1}{2}\lambda^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{e^{-x\sqrt{2s}} - e^{-\lambda x}}{\left(s - \frac{1}{2}\lambda^2\right)^2}. \qquad (8)$$

Действительно, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} M e^{-\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}} \alpha^*_{nt}}\, dt = \frac{1}{n} \tilde{\varphi}^*_{[x\sigma\sqrt{n}]}\left(\frac{s}{n}, e^{-\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}}\right).$$

и учитывая, что $|\lambda_i(0)| < 1$, $2 \leqslant i \leqslant \nu$, а при $n \to \infty$

$$1 - \lambda_1\left(\frac{s}{n}\right) \sim \sigma (2s)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}, \quad a(e^{-\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}}) \sim \lambda^2 (2n)^{-1},$$

$$a'(e^{-\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}}) \sim \lambda\sigma n^{-\frac{1}{2}},$$

получаем (8).

Процесс w_t^*, $t \geqslant 0$, изучен в [1]. Его можно определить как $w_t(A)$, где $A = \{w_u > 0,\ u \geqslant 0\}$, w_t — стандартный винеровский процесс, выходящий из положительного состояния x; w_t^* — диффузионный процесс с фазовым пространством $(0, \infty)$, со сносом y^{-1} и диффузией 1, граничная точка нуль — отталкивающая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И., Королюк В. С. Предельные теоремы для одного класса условных марковских процессов: Препринт 78.3.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— 48 с.
2. Iglehart D. L. Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive.— Ann. of Prob. 1974, **2**, №4, p. 608—619.
3. Зюков М. Е. Распределение некоторых функционалов для случайного блуждания с ограниченными снизу скачками.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, №5, с. 543—547.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2.— М.: Мир, 1967.— 752 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 5.VII 1978 г.
после переработки — 28.II 1979 г.