УДК 518:517.948

Т. С. Курченко

О сходимости нестационарных проекционно-итеративных вариантов основного и «уточненного» методов Ньютона — Канторовича решения нелинейных операторных уравнений

1. При построении последовательных приближений к решению уравнения

$$x = Ax \tag{1}$$

при помощи методов Ньютона — Канторовича [1] нужно находить обратные операторы $T_n = [I - A'(x_n)]^{-1}$ и $T_0 = [I - A'(x_0)]^{-1}$, где $A'(x_n)$, $A'(x_0)$ — значения первой производной Фреше оператора A в точках x_n, x_0 соответственно. Это во многих случаях представляется трудной задачей. Она часто облегчается при применении алгоритмов из [2, 3], где вместо операторов T_n и T_0 нужно находить операторы $[I - PA'(x_n)]^{-1}$, $[I - PA'(x_0)]^{-1}$ (P — некоторый проекционный оператор, проектирующий пространство E на его подпространство E_P). Однако скорость сходимости таких алгоритмов оказалась хуже [2], чем основных вариантов методов Ньютона — Канторовича.

В [4, 5] предлагаются нестационарные проекционно-итеративные методы:

$$x_{n+1} = Ax_n - P_nA'(x_n)\,x_n + P_nA'(x_n)\,x_{n+1}, \tag{2}$$

где $N_k = \{k, k+1, \ldots\}$, $k = 0, 1, \ldots$, $\{P_n\}$ — последовательность линейных проекционных операторов ($P_n = P_n^2\ \forall n$), проектирующих пространство E на его подпространства E_n. В работе [4] при помощи алгоритмов (2), (3) построены монотонные последовательности приближений к решению x^* уравнения (1) в банаховом пространстве E, полуупорядоченном конусом K.

Исследуемые здесь алгоритмы обладают всеми преимуществами нестационарных и проекционно-итеративных методов. В частности, они позволяют в некоторых случаях сократить объем вычислений [4, 5]. В данной работе показано, что эти алгоритмы могут иметь тот же порядок сходимости, что и методы Ньютона — Канторовича.

2. Предположим, что оператор A определен и непрерывен на некотором шаре $S(x_0, R) = \{x; \|x - x_0\| < R\}$ банахова пространства E, где x_0 — начальное приближение для последовательности $\{x_n\}$, построенной при помощи исследуемого алгоритма.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\exists\, x_0 \in E$ *и* $\|x_0 - Ax_0\| \leqslant \eta_0$;

2) $\exists\, [I - P_n A'(x)]^{-1}\ \ \forall x \in S(x_0, R)$, $\|[I - P_0 A'(x)]^{-1}\| \leqslant B_0$, $\|[I - P_n \times A'(x)]^{-1}\| \leqslant B$;

3) *в шаре* S *выполняются неравенства*

$$\|P_n A'(x) - P_n A'(y)\| \leqslant M_n \|x - y\|, \ \|Q_n A(x) - Q_n A(y)\| \leqslant q_n \|x - y\| \quad (Q_n = I - P_n);$$

4) *справедливы соотношения*

$$q_n \leqslant \frac{1}{B} J_1^{2^n - 1}\left(J_1 - \frac{1}{2} B B_0 M_n \eta_0\right), \quad n \in N_1,$$

$$J_1 < 1, \ \frac{1}{2} B B_0 M_n \eta_0 < J_1 \quad \forall n \in N_0, \ R \geqslant r = B_0 \eta_0 \sum_{k=0}^{\infty} J_1^{2^k - 1}, \tag{4}$$

где $J_1 = B\left(\frac{1}{2} B_0 M_0 \eta_0 + q_0\right)$.

Тогда уравнение (1) *имеет решение* $x^* \in S$, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *построенная по алгоритму* (2), *начиная с элемента* x_0. *При этом справедлива оценка погрешности*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B_0 \eta_0 \frac{J_1^{2^n - 1}}{1 - J_1^{2^n}}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $\Gamma_n = [I - P_n A'(x_n)]^{-1}$. Из уравнения (2), используя формулу конечных приращений и условия 1)—2) теоремы, находим

$$\|\delta_{n+1}\| = \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \|\Gamma_n\| [\|P_{n-1}Ax_n - P_{n-1}Ax_{n-1} - P_{n-1}A'(x_{n-1})\delta_n\| + \|Q_{n-1}Ax_n - Q_{n-1}Ax_{n-1}\|] \leqslant B\left\{\left\|\int_0^1 [P_{n-1}A'(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})) - P_{n-1}A'(x_{n-1})]\delta_n dt\right\| + q_{n-1}\|\delta_n\|\right\} \leqslant \frac{1}{2} B M_{n-1} \|\delta_n\|^2 + B q_{n-1} \|\delta_n\|.$$

Ввиду условий 4) имеем $\|\delta_2\| \leqslant J_1 \|\delta_1\|$, $\|\delta_3\| \leqslant J_1^3 \|\delta_1\|$ и т. д.

$$\|\delta_{n+1}\| \leqslant \prod_{k=1}^{n} J_k \|\delta_1\| \leqslant J_1^{2^n - 1} \|\delta_1\|, \tag{6}$$

где $J_k = \frac{1}{2} B M_{k-1} \|\delta_k\| + B q_{k-1}$, $k \in N_1$.

По индукции доказывается, что $x_n \in S$. Из (6) имеем

$$\| x_{n+m} - x_n \| \leqslant \sum_{k=n}^{n+m-1} B_0 \eta_0 J_1^{2^k - 1}, \tag{7}$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и существует предел $x^* = \lim_n x_n$, являющийся решением уравнения (1). Кроме того, $x^* \in S$. Из (7) при $m \to \infty$ получаем оценку погрешности (5).

Замечание 1. Из теоремы 1 при $P_n \equiv I$ $\forall n$ следует теорема Мысовских [6], в которой условие существования второй производной Фреше оператора A заменено условием Липшица для производной на шаре $S(x_0, R)$.

Замечание 2. Если выполнено неравенство

$$\| P_0 A'(x) - P_n A'(x) \| < \| [I - P_0 A'(x)]^{-1} \|^{-1} \quad \forall x \in S, \ n \in N_1, \tag{8}$$

то в условии 2) теоремы достаточно требовать

$$\exists \ [I - P_0 A'(x)]^{-1} \quad \forall x \in S(x_0, R) \ \text{ и } \ \| [I - P_0 A'(x)]^{-1} \| \leqslant B_0.$$

Если, кроме того, предположить, что $g_0 = B_0^2 M_0 \eta_0 < 1$, то вместо условия 2) можно требовать выполнения неравенства (8), $\exists \ [I - P_0 A'(x_0)]^{-1}$ и $\| I - P_0 A'(x_0)]^{-1} \| \leqslant B_0$.

3. Часто условия теоремы 1 трудно проверяются, так как требуется оценка оператора $[I - P_n A'(x)]^{-1}$. В теореме 2 устанавливаются некоторые более жесткие, но легче проверяемые условия сходимости алгоритма (2) для случая, когда E — гильбертово пространство, а P — операторы ортогонального проектирования.

Теорема 2. *Пусть в шаре S выполняются условия* 3) *теоремы* 1 *и, кроме того*:

1) *известна оценка* $\| \Gamma_0 (x_0 - Ax_0) \| \leqslant \| \delta_1 \|$;
2) *уравнения* (2) *разрешимы относительно* x_{n+1} $\forall n \in N_0$;
3) *выполняются соотношения*:

$$\| P_n A'(x) \| \leqslant l < 1 \quad \forall n \in N_0, \tag{9}$$

$$q_n^2 \leqslant H_1^{2(2^n - 1)} \left[H_1^2 - \frac{1}{2} (M_n \| \delta_1 \| + H_1 l)^2 \right] \quad \forall n \in N_1,$$

$$l^2 + q_0^2 < 1, \ \| \delta_1 \| < 2 \min \left[\frac{1}{M} H_1 (1 - l), \frac{1}{M_0} \left(\sqrt{1 - q_0^2} - l \right) \right],$$

$$R \geqslant r = \sum_{k=0}^{\infty} H_1^{2^k - 1} \| \delta_1 \|,$$

где $H_1 = \dfrac{1}{2(1 - l^2)} \left(M_0 l \| \delta_1 \| + \sqrt{4(1 - l^2) q_0^2 + M_0^2 \| \delta_1 \|^2} \right)$, $M_n \leqslant M$.

Тогда процесс (2) *сходится к решению* $x^* \in S$ *уравнения* (1) *и справедлива оценка погрешности*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{H_1^{2^n - 1}}{1 - H_1^{2^n}} \| \delta_1 \|. \tag{10}$$

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$\| \delta_{n+1} \|^2 = \| P_{n-1} A x_n - P_{n-1} A x_{n-1} - P_{n-1} A'(x_{n-1}) \delta_n + P_n A'(x_n) \delta_{n+1} \|^2 +$$

$$+ \| Q_{n-1} A x_n - Q_{n-1} A x_{n-1} \|^2 \leqslant \left[\frac{1}{2} M_{n-1} \| \delta_n \|^2 + l \| \delta_{n+1} \| \right]^2 + q_{n-1}^2 \| \delta_n \|^2.$$

4. Пусть E — координатное банахово пространство с элементами $x = \{x_k\}$, где k — конечное число или бесконечность, с нормой $\|x\| = \sup_i \|x_i\|_{E_i}$, где $\|x_i\|_{E_i}$ — норма элемента x_i в пространстве E_i, и операцией проектирования P_n:

$$P_n x = \begin{cases} x_i, & i = 1, 2, \ldots, r_n, \\ 0, & i = r_n + 1, \ldots, k, \end{cases} \quad k \in N_0, \ r_n \leqslant k \quad \forall n.$$

Один простой признак сходимости алгоритма (2) в случае координатного банахова пространства дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в некотором шаре* $\overset{\circ}{S}$ *выполняются условия* 3) *теоремы* 1, *условия* 1), 2) *теоремы* 2, *неравенство* (9) *и*

$$q_n < \frac{1}{2(1-l)} M_n h_1^{2^n-1} \|\delta_1\|, \ n \in N_0, \ h_1 = \frac{1}{1-l} M \|\delta_1\| < 2, \ M_n \leqslant M. \quad (11)$$

Если, кроме того, все x_n, *определяемые по алгоритму* (2), *принадлежат* S, *тогда последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к решению* $x^* \in S$ *уравнения* (1) *и имеет место оценка погрешности* (10), *где величина* H_1 *заменена величиной* h_1.

Доказательство теоремы базируется на неравенствах

$$\|\delta_{n+1}\| \leqslant \max\{\|P_{n-1}Ax_n - P_{n-1}Ax_{n-1} - P_{n-1}A'(x_{n-1})\delta_n + P_nA'(x_n)\delta_{n+1}\|,$$

$$\|Q_{n-1}Ax_n - Q_{n-1}Ax_{n-1}\|\} \leqslant \max\left\{\frac{1}{2} M_{n-1}\|\delta_n\|^2 + l\|\delta_{n+1}\|, q_{n-1}\|\delta_n\|\right\},$$

$$\|\delta_{n+1}\| \leqslant \max\left\{\frac{1}{2(1-l)} M_{n-1}\|\delta_n\|^2, \ q_{n-1}\|\delta_n\|\right\}.$$

Проиллюстрируем проверку условий теоремы 3 на простом примере [4]. Если решать систему

$$x_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} x_j^i, \quad i \in N_1 \quad (12)$$

методом (2), исходя из начального приближения $x_{i,0} = \frac{1}{5}$ $\forall i$, при $r_0 = 3$, т. е.

$$P_0 A'(y)\, x = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} y_j^{i-1} x_j, & i = 1, 2, 3, \\ 0, & i \in N_4, \end{cases}$$

найдем $x_{1,1} = 0{,}4978$, $x_{2,1} = 0{,}4766$, $x_{3,1} = 0{,}4887$, $x_{i,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} \frac{1}{5^i}$, $i \in N_4$.

Система (12) имеет в области $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ точное решение $x_i = 0{,}5$. Если эту систему рассматривать в пространстве E с нормой m, то в области $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ получим оценки

$$\|\delta_1\| \leqslant \max_{i \in N_1} |x_{i,1} - x_{i,0}| = 0{,}3, \ l \leqslant \max_{i \in N_1} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} y_j^{i-1} \right| \leqslant \frac{1}{2},$$

$$q_0 \leqslant \max_{i \in N_4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} |x_j|^{i-1} \leqslant \frac{1}{128}, \quad M_0 \leqslant \max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2^{i+j}} |x_j|^{i-2} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$M = \max_{i \in N_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2^{i+j}} |x_j|^{i-2} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $l < 1$, $h_1 < 2$, т. е. для $n = 0$ условие (11) выполняется: $q_0 < 0{,}15$. Как в работах [4, 5], для $n = 1$ положим $r_1 = 2$. Тогда $q_1 = 0{,}03$, $M_1 = 0{,}5$ и условие (11) опять выполняется. Если выбирать $r_n > r_{n-1}$, $n \in N_1$, то можно удовлетворить требованию (11) и получить квадратичную сходимость метода (2).

5. Рассмотрим нестационарный проекционно-итеративный вариант [4] «уточненного» метода Ньютона — Канторовича (метода Чебышева):

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n (Ax_n - x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n A''(x_n) [\Gamma_n (Ax_n - x_n)]^2, \quad n \in N_0, \tag{13}$$

где $A''(x_n)$— значение второй производной Фреше оператора A в точке x_n, $\Gamma_n = [P_n A'(x) - I]^{-1}$, а через $[\Gamma_n (Ax_n - x_n)]^2$—обозначено билинейную операцию в пространстве E. Аналогично методу Ньютона — Канторовича, можно показать, что алгоритм (13) при некоторых условиях на операторы P_n имеет тот же порядок сходимости, что и метод Чебышева (см. [7—10] и др.).

Теорема 4. *Пусть в шаре S выполнены условия* 2) *теоремы* 1, *причем $\| \Gamma_0 (Ax_0 - x_0) \| \leqslant \eta_0$, и имеют место неравенства*

$$\| Q_n A'(x) \| \leqslant q_n, \quad \| A''(x) - A''(y) \| \leqslant M \| x - y \|,$$

$$\| P_n A''(x) \| \leqslant K_1 \ \forall n \in N_0, \quad \max (\| A''(x) \|, K_1) \leqslant K,$$

$$h_0 E_0 < 1, \tag{14}$$

$$q_{n+1} \leqslant (h_0 E_0)^{4 \cdot 3^n} q_n, \quad n \in N_0, \tag{15}$$

$$R \geqslant r = \sum_{n=0}^{\infty} (h_0 E_0)^{3^n - 1} \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) \eta_0,$$

где $h_0 = BK\eta_0$, $E_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{M}{6BK^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3 + \frac{q_0}{h_0^2}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)$.

Тогда уравнение (1) *имеет решение $x^* \in S(x_0, R)$, к которому сходится последовательность $\{x_n\}$, определенная по алгоритму* (13) *со скоростью, характеризуемой неравенством $\| x^* - x_n \| \leqslant r (h_0 E_0)^{3^n - 1}$.*

Доказательство. Из уравнения (13) при $n = 0$ находим

$$\| \delta_1 \| \leqslant \| \Gamma_0 (Ax_0 - x_0) \| + \frac{1}{2} \| \Gamma_0 \| \| A''(x_0) \| \| \Gamma_0 (Ax_0 - x_0) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0 + \frac{1}{2} BK\eta_0^2 = \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) \eta_0.$$

Далее теорема доказывается по индукции. Используя формулу Тейлора — Грейвса для разложения Ax в окрестности точки x_0

$$Ax_1 = Ax_0 + P_0 A'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} A''(x_0)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2} \int^{1} [A''(x_0 +$$

$$+\tau(x_1-x_0))-A''(x_0)](1-\tau)\,d\tau\,(x_1-x_0)^2+Q_0A'(x_0)(x_1-x_0)$$

и значение x_1-x_0 из уравнения (13) при $n=1$, в силу условий теоремы находим оценку

$$\|Ax_1-x_1\|\leqslant\frac{1}{2}BK^2\eta_0^3+\frac{1}{8}B^2K^3\eta_0^4+\frac{1}{6}M\|\delta_1\|^3+q_0\|\delta_1\|=\frac{1}{B}(h_0E_0)^2\eta_0.$$

Согласно условию (14) теоремы, имеем

$$\eta_1=\|\Gamma_1(Ax_1-x_1)\|\leqslant(h_0E_0)^2\eta_0<\eta_0,\quad h_1=BK\eta_1\leqslant\frac{1}{E_0}(h_0E_0)^3<h_0.$$

Далее,

$$E_1^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_1}{4}\right)+\frac{M}{6BK^2}\left(1+\frac{h_1}{2}\right)^3+\frac{q_1}{h_1^2}\left(1+\frac{h_1}{2}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_0}{4}\right)+\frac{M}{6BK^2}\left(1+\frac{h_0}{2}\right)^3+\frac{q_0}{h_0^2}\left(1+\frac{h_0}{2}\right)=E_0^2,$$

потому что при условии (15)

$$\frac{q_1}{h_1^2}\left(1+\frac{h_1}{2}\right)<\frac{q_0}{h_0^2}\left(1+\frac{h_0}{2}\right).$$

По индукции находим

$$\eta_n\leqslant(h_{n-1}E_{n-1})^2\eta_{n-1}<\eta_{n-1},\ h_n\leqslant\frac{1}{E_{n-1}}(h_{n-1}E_{n-1})^3<h_{n-1},$$

$$\|\delta_{n+1}\|\leqslant\left(1+\frac{h_n}{2}\right)\eta_n,\quad E_n^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_n}{4}\right)+\frac{M}{6BK^2}\left(1+\frac{h_n}{2}\right)^3+$$

$$+\frac{q}{h_n^2}\left(1+\frac{h_n}{2}\right)\leqslant E_{n-1}^2,$$

т. е.

$$\eta_n<(h_0E_0)^{3^n-1}\eta_0,\quad h_n<\frac{1}{E_0}(h_0E_0)^{3^n},\quad \|\delta_{n+1}\|<\left(1+\frac{h_0}{2}\right)(h_0E_0)^{3^n-1}\eta_0.$$

Значит,

$$\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant(h_0E_0)^{3^n-1}\left(1+\frac{h_0}{2}\right)\eta_0\sum_{i=0}^{m-1}(h_0E_0)^i.$$

Далее теорема доказывается так же, как теорема 1. Заметим, что тот факт, что предел x^* последовательности $\{x_n\}$, определяемой по алгоритму (13), является решением уравнения (1), следует ввиду условия (14) из неравенства $\|Ax_n-x_n\|\leqslant\frac{1}{B}(h_0E_0)^{3^n-1}\eta_0$ при $n\to\infty$.

Замечания 1—2, относящиеся к нестационарным проекционно-интеративным вариантам метода Ньютона — Канторовича, могут быть сделаны и для алгоритма (13).

Если рассматривать конкретные пространства, то можно, как и для метода (2), получить некоторые иные условия сходимости алгоритма (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— Успехи мат. наук., 1948, 3, №6, с. 89—185.
2. Курпель Н. С., Мигович Ф. М. О некоторых обобщениях метода Ньютона — Канторовича.— Укр. мат. журн., 1969, 21, №5, с. 594—609.

3. Красносельский М. А. Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений.— М.: Физматгиз, 1969.— 455 с.
4. Кравчук [Курченко] Т. С. Об одном обобщении метода Ньютона — Канторовича.— Укр. мат. журн., 1971, **23**, №1, с. 104—110.
5. Курпель Н. С., Курченко Т. С. Двусторонние методы решения систем уравнений.— Киев: Наук. думка, 1974.—184 с.
6. Мысовских И. П. О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применения.— ДАН СССР, 1950, **70**, №4, с. 565—568.
7. Чебышев П. Л. Собрание сочинений.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1951.— Т. 5. 473 с.
8. Нечепуренко М. И. О методе Чебышева для функциональных уравнений.— Успехи мат. наук, 1954, **9**, №2, с. 163—170.
9. Курчатов В. А. О некоторых условиях сходимости метода Чебышева.— Труды Казан. хим.-технол. ин-та, 1971, вып. 42, с. 3—8.
10. Döring Boro. Das Tschebyscheffverfahren in Banach Räumen.— Numer. Math., 1970, **15**, № 3, S. 175—195.

Институт гидробиологии
АН УССР

Поступила в редакцию
17.VI 1978 г.