УДК 519.217

Р. В. Бойко

О надкритическом ветвящемся процессе с переменным режимом

Ветвящийся процесс с переменным режимом $\xi(t)$ (определение см. в [1]) с производящими функциями интенсивностей размножения $\varphi_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m(k) z^m$, $\pi_m(k) \geqslant 0$, $m \neq 1$, $\pi_1(k) < 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} \pi_m(k) = 0$, если количество существующих частиц k не превышает некоторого фиксированного уровня N $(k \leqslant N)$, и $\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m z^m$, $\mu_m \geqslant 0$, $m \neq 1$, $\mu_1 < 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m = 0$, если число частиц превышает уровень N, называем по аналогии с обычными ветвящимися процессами надкритическим, когда

$$\frac{d\psi(1)}{dz} > 0.$$

Переходные вероятности $\xi(t)$ обозначаем через $P_{ij}(t)$, $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$.

Предполагаем, что процесс $\xi(t)$ начинается из единицы, т. е. $\xi(0) = 1$.

Введем производящую функцию переходных вероятностей ветвящегося процесса с переменным режимом $\xi(t)$

$$F(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{1k}(t) z^k, \ |z| \leqslant 1.$$

Теорема. *Если в надкритическом ветвящемся процессе с переменным режимом* $\xi(t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(1)}{\partial z^2} < \infty, \ k = 1, 2, \ldots, N, \quad \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial z^2} < \infty,$$

то случайная величина $\eta(t) = \xi(t) e^{-\psi'(1)t}$ *при* $t \to \infty$ *сходится в среднем квадратическом к случайной величине* η, *преобразование Лапласа распределения* η *имеет вид*

$$h(\lambda) = f(\lambda) - \int_{f(\lambda)}^{1} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} k x^{k-1} (\varphi_k(x) - \psi(x)) P_{1k}\left(-\int_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx,$$

где $f(\lambda)$ — *преобразование Лапласа некоторого распределения, удовлетворяющее соотношению*

$$1 - f(\lambda) = \lambda \exp\left\{\int_{1}^{f(\lambda)} \frac{\psi(x) - \psi'(1)(x-1)}{\psi(x)(x-1)} dx\right\},$$

а явный вид преобразований Лапласа переходных вероятностей $P_{1k}(t)$, $k = \overline{1, N}$ *дается формулами* (7) *работы* [1]; *функция распределения* $H(x)$ *случайной величины* η *имеет скачок в нуле* $\alpha = P\{\eta = 0\}$, *где* $\alpha = \lim_{t \to \infty} P_{10}(t)$ — *вероятность вырождения ветвящегося процесса с переменным режимом* $\xi(t)$, *определяемая формулой* (18) *работы* [1].

Доказательство. Пусть $t' > t$. Покажем, что при $t, t' \to \infty$ $M(\eta(t) - \eta(t'))^2 \to 0$. Имеем

$$M(\eta(t) - \eta(t'))^2 = M\eta^2(t) + M\eta^2(t') - 2M\eta(t)\eta(t'). \quad (1)$$

В работе [2] получены следующие формулы для моментов ветвящегося процесса с переменным режимом $\xi(t)$:

$$M\xi(t) = e^{\psi'(1)t} + m_N(t), \quad (2)$$

где

$$m_N(t) = \sum_{k=1}^{N} k(\varphi'_k(1) - \psi'(1)) \int_0^t e^{\psi'(1)(t-\tau)} P_{1k}(\tau) d\tau; \quad (3)$$

$$M\xi(t)(\xi(t) - 1) = \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} e^{\psi'(1)t} (e^{\psi'(1)t} - 1) + q_N(t), \quad (4)$$

где

$$q_N(t) = \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^t e^{\psi'(1)(t-\tau)} (e^{\psi'(1)(t-\tau)} - 1) P_{1k}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (2k(k-1)(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) + k(\varphi_k''(1) - \psi''(1))) \int_0^t e^{2\psi'(1)(t-\tau)} P_{1k}(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

В силу равенств (2), (4)

$$M\eta^2(t) = e^{-2\psi'(1)t} \left(\frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} e^{\psi'(1)t} (e^{\psi'(1)t} - 1) - e^{\psi'(1)t} \right) +$$

$$+ e^{2\psi'(1)t} (q_N(t) - m_N(t)). \tag{6}$$

Так как при $t \to \infty$

$$\int_0^t e^{\psi'(1)(t-\tau)} P_{1k}(\tau)\, d\tau = O(e^{\psi'(1)t}), \tag{7}$$

то из (6) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} M\eta^2(t) = \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} + \frac{\psi''(1)}{\psi'(1)} \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^\infty e^{-2\psi'(1)\tau} P_{1k}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} (2k(k-1)(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) + k(\varphi_k''(1) - \psi''(1))) \int_0^\infty e^{-2\psi'(1)\tau} P_{1k}(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Далее, согласно формуле (10) работы [2]

$$\sum_{r=0}^{\infty} rP_{mr}(t) = me^{\psi'(1)t} + \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^t e^{\psi'(1)(t-\tau)} P_{mk}(\tau)\, d\tau,$$

поэтому

$$M\eta(t)\,\eta(t') = e^{-\psi'(1)(t'+t)} M\xi(t)\,\xi(t') =$$

$$= e^{-\psi'(1)(t'+t)} \sum_{r=0}^{\infty} rP_{1r}(t) \sum_{l=0}^{\infty} lP_{rl}(t'-t) = e^{-\psi'(1)(t'+t)} \sum_{r=0}^{\infty} rP_{1r}(t) \Big(re^{\psi'(1)(t'-t)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^{t'-t} e^{\psi'(1)(t'-t-\tau)} P_{rk}(\tau)\, d\tau \Big) =$$

$$= M\eta^2(t) + e^{-2\psi'(1)t} \sum_{r=0}^{\infty} rP_{1r}(t) \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^{t'-t} e^{-\psi'(1)\tau} P_{mk}(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\Big| \sum_{r=0}^{\infty} rP_{1r}(t) \sum_{k=1}^{N} k(\varphi_k'(1) - \psi'(1)) \int_0^{t'-t} e^{-\psi'(1)\tau} P_{mk}(\tau)\, d\tau \Big| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{r=0}^{\infty} rP_{1r}(t) = O(e^{\psi'(1)t}) \text{ при } t \to \infty,$$

где c — некоторая константа.

Поэтому при $t,\ t' \to \infty$

$$\lim_{t,t'\to\infty} M\eta(t)\,\eta(t') = \lim_{t\to\infty} M\eta^2(t). \tag{10}$$

Таким образом, из (1), (8) и (10) следует, что $M(\eta(t) - \eta(t'))^2 \to 0$ при $t,\ t' \to \infty$ и существует предел $\eta = \text{l.i.m.}\ \eta(t)$.

Следовательно, преобразование Лапласа $F(t, \exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)t}\})$ случайной величины $\eta(t) = \xi(t)\,e^{-\psi'(1)t}$ при $t \to \infty$ сходится к преобразованию Лапласа $h(\lambda)$ случайной величины η. Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} F(t, \exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)t}\}) = h(\lambda) = f(\lambda) -$$

$$- \int_{f(\lambda)}^{1} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}(\varphi_k(x) - \psi(x))\, P_{1k}\left(-\int_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx. \tag{11}$$

Из формулы (3) работы [1] легко получить, что $F(t, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,z)}{\partial t} = \psi(z)\,\frac{\partial F(t,z)}{\partial z} + \sum_{k=1}^{N} kz^{k-1}(\varphi_k(z) - \psi(z))\, P_{1k}(t) \tag{12}$$

с начальным условием $F(0, z) = z$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что решение уравнения (12) может быть представлено в виде

$$F(t,z) = \Phi(t,z) + \int_{z}^{\Phi(t,z)} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}(\varphi_k(x) - \psi(x))\, P_{1k}\left(\int_{x}^{\Phi(t,z)} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx, \tag{13}$$

где $\Phi(t, z)$ — решение уравнения $\dfrac{\partial \Phi(t,z)}{\partial t} = \psi(z)\,\dfrac{\partial \Phi(t,z)}{\partial z}$ с начальным условием $\Phi(0, z) = z$.

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, \exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)t}\}) = f(\lambda), \tag{14}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = q,\ \ f(\lambda) > q \ \text{ при } \lambda < \infty, \tag{15}$$

где q — наименьший неотрицательный корень уравнения $\psi(x) = 0$ (см. [3 гл. II]), то для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ такого, что $1 - \varepsilon > q$, $f(\lambda) - \varepsilon > q$, существует такое $T_1(\varepsilon)$, что при $t \geqslant T_1(\varepsilon)$

$$|f(\lambda) - \Phi(t, \exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)t}\})| < \varepsilon; \tag{16}$$

кроме того, найдется такое $T_2(\varepsilon)$, что при $t \geqslant T_2(\varepsilon)$

$$|1 - \exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)t}\}| < \varepsilon. \tag{17}$$

Пусть $\tau = \max(T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon))$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} \int_{z_\lambda(\tau)}^{\Phi(\tau, z_\lambda(\tau))} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}(\varphi_k(x) - \psi(x))\, P_{1k}\left(\int_{x}^{\Phi(t, z_\lambda(t))} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx =$$

$$= \int_{z_\lambda(\tau)}^{\Phi(\tau, z_\lambda(\tau))} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}(\varphi_k(x) - \psi(x))\, P_{1k}\left(\int_{x}^{f(\lambda)} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx,$$

где $z_\lambda(\tau)=\exp\{-\lambda e^{-\psi'(1)\tau}\}$ в силу теоремы 2 [4, стр. 748], так как допредельная подынтегральная функция в наших условиях равномерно ограничена и для всех $x\in[z_\lambda(\tau),\Phi(\lambda,z_\lambda(\tau))]$ существует предельная подынтегральная функция, интегрируемая в том же промежутке. Поэтому найдется такое $\tau_1(\varepsilon)$, что при $t>\tau_1(\varepsilon)$

$$\Big|\int\limits_{z_\lambda(\tau)}^{\Phi(\tau,z_\lambda(\tau))}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\,P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx-$$

$$-\int\limits_{z_\lambda(\tau)}^{\Phi(\tau,z_\lambda(\tau))}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\,P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{f(\lambda)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|<\varepsilon. \qquad (18)$$

Тогда при $t\geqslant t'=\max(\tau,\tau_1(\varepsilon))$ в силу (16) — (18):

$$\Big|\int\limits_{z_\lambda(t)}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\,P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx-$$

$$-\int\limits_{1}^{f(\lambda)}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\,P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{f(\lambda)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\int\limits_{z_\lambda(t')}^{\Phi(t',z_\lambda(t'))}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\Big(P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{du}{\psi(u)}\Big)-$$

$$-P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{f(\lambda)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)\Big)dx\Big|+\Big|\int\limits_{z_\lambda(t')}^{z_\lambda(t)}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\times$$

$$\times P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|+\Big|\int\limits_{\Phi(t',z_\lambda(t'))}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\times$$

$$\times P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{\Phi(t,z_\lambda(t))}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|+\Big|\int\limits_{\Phi(t',z_\lambda(t'))}^{f(\lambda)}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-\psi(x))\times$$

$$\times P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{f(\lambda)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|+\Big|\int\limits_{1}^{z_\lambda(t')}\frac{1}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{N}kx^{k-1}(\varphi_k(x)-$$

$$-\psi(x))\,P_{1k}\Big(\int\limits_{x}^{f(\lambda)}\frac{du}{\psi(u)}\Big)dx\Big|\leqslant 5\varepsilon C,$$

где C — некоторая константа. Отсюда, ввиду произвольности ε следует равенство (11).

Покажем, что функция распределения $H(x)$ случайной величины η, преобразование Лапласа которой задается формулой (11), имеет скачок в нуле, равный α. Так как η неотрицательно, то $P\{\eta = 0\} = \lim\limits_{\lambda\to\infty} h(\lambda)$, следовательно, нужно показать, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = \lim\limits_{t\to\infty} P_{10}(t) = \alpha$.

Проведем следующие несложные выкладки:

$$h(\lambda) = f(\lambda) - \int\limits_{f(\lambda)}^{1} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} (\varphi_k(x) - \psi(x)) P_{1k}\left(-\int\limits_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}\right) dx =$$

$$= f(\lambda) + \int\limits_{f(\lambda)}^{1} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} \; \varphi_k(x) - \psi(x))\, d \int\limits_{0}^{-\int\limits_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}} P_{1k}(v)\, dv =$$

$$= f(\lambda) - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{f(\lambda)}^{1} \int\limits_{0}^{-\int\limits_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}} P_{1k}(v)\, dv \frac{d}{dx} kx^{k-1}(\varphi_k(x) - \psi(x))\, dx =$$

$$= f(\lambda) - \sum_{k=1}^{N} \Big(\int\limits_{f(\lambda)}^{f(\lambda)+\varepsilon} + \int\limits_{f(\lambda)+\varepsilon}^{1} \Big) = f(\lambda) - \sum_{k=1}^{N} (I_{1k}(\varepsilon) + I_{2k}(\varepsilon)), \tag{19}$$

где ε — достаточное малое положительное число. Так как $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = q$ и $\psi(q) = 0$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int\limits_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)} = \infty$. Далее, из второй системы уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{1k}(t)$ легко заключить, что интеграл $\int\limits_0^\infty P_{1k}(t)\, dt$ сходится для любого конечного $k > 0$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{N} I_{2k}(\varepsilon) = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{f(\lambda)+\varepsilon}^{1} \int\limits_{0}^{-\int\limits_{f(\lambda)}^{x} \frac{du}{\psi(u)}} P_{1k}(v)\, dv \frac{d}{dx} kx^{k-1} (\varphi_k(x) - \psi(x))\, dx =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^\infty P_{1k}(v)\, dv k (q+\varepsilon)^{k-1} (\varphi_k(q+\varepsilon) - \psi(q+\varepsilon)). \tag{20}$$

Устремляя ε к нулю в $I_{1k}(\varepsilon)$ и в формуле (20), получим, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = q - \sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_0^\infty P_{1k}(v)\, dv q^{k-1} \varphi_k(q). \tag{21}$$

С другой стороны, положив в (13) $z = 0$, получим, что

$$\lim_{t\to\infty} P_{10}(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\Phi(t, 0) + \int\limits_0^{\Phi(t,0)} \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} (\varphi_k(x) - \right.$$

$$\left. - \psi(x)) P_{1k}\left(\int\limits_x^{\Phi(t,0)} \frac{du}{\psi(u)} \right) dx \right] = \alpha. \tag{22}$$

Из формулы (22) можно получить для α представление (21), проведя аналогичные выкладки и рассуждения, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Р. В. Об одном управляемом ветвящемся процессе.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 2, с. 237—243.
2. Бойко Р. В. О моментах ветвящегося процесса с переменным режимом.— В кн.: Аналитические методы теории вероятностей. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 9—14.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы.— М.: Наука, 1971.— 436 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1966. Т. 2.— 800 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
6.IX 1978 г.