УДК 517.5

В. Н. Бушмакин, В. К. Иванел

Формула Обрешкова для функций, имеющих разрывы 1-го рода

Цель данной работы — обобщить формулу Обрешкова для функций от n переменных, имеющих разрывы 1-го рода.

Пусть в некоторой области $D \subset R_n$ задана функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$; $L_{n-1} \subset D$ — гиперповерхность разрыва 1-го рода функции и ее частных производных до порядка $k + m + 1$, где k и m — фиксированные натуральные числа, характеризующие порядок формулы Обрешкова.

Точки $M_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $M(x_1, \ldots, x_n) \in D$, причем

$$[M_0; M] \cap L_{n-1} = \{M_1^*(x_{1*}^{(1)}, \ldots, x_{n*}^{(1)}), \ldots, M_s^*(x_{1*}^{(s)}, \ldots, x_{n*}^{(s)})\}.$$

Наша задача— установить формулу Обрешкова порядков k, m для точек M_0, M.

Остаток формулы Обрешкова имеет вид [1]

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{k+m}(k+m+1)\int_0^1 u^k (u-1)^m \times$$

$$\times \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=k+m+1 \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,k+m+1}}} \frac{\partial^{(k+m+1)} f(x_1^{(0)} + u(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + u(x_n - x_n^{(0)}))}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}} \times$$

$$\times \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}\, du. \qquad (1)$$

Введем вспомогательную функцию $F(u) = f(x_1^{(0)} + u(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots$ $\ldots, x_n^{(0)} + u(x_n - x_n^{(0)}))$ от переменной $u \in [0, 1]$. Очевидно, что

$$F(0) = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad F(1) = f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Согласно теореме о производной сложной функции

$$F^{(l)}(u) = l! \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=l \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,l}}} \frac{\partial^{(l)} f(x_1^{(0)} + u(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + u(x_n - x_n^{(0)}))}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}} \times$$

$$\times \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{3}$$

Из формул (1) и (3) следует, что

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \int_0^1 u^k (u-1)^m F^{(k+m+1)}(u)\, du. \tag{4}$$

Формулы $\xi_j = x_j^{(0)} + u(x_j - x_j^{(0)})$, $u \in [0, 1]$, $j = \overline{1, n}$,— задают отрезок $[M_0, M]$ параметрически.

Пусть $u_1^*, \ldots, u_s^* \in [0, 1]$ — значения параметров, соответствующих точкам $M_1^*, M_2^*, \ldots, M_s^*$ пересечения $[M_0, M]$ с гиперповерхностью разрыва 1-го рода L_{n-1}, т. е.

$$x_{j*}^{(i)} = x_j^{(0)} + u_i^*(x_j - x_j^{(0)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, s}. \tag{5}$$

Из равенства (5) имеем

$$u_i^* = \frac{x_{1*}^{(i)} - x_1^{(0)}}{x_1 - x_1^{(0)}} = \ldots = \frac{x_{n*}^{(i)} - x_n^{(0)}}{x_n - x_n^{(0)}}, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{6}$$

Обозначим

$$A_{s_1,\ldots,s_n,p}^{(l)} = \frac{\partial^{(l)} f\,[x_1^{(0)} + (u_p^* + 0)(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + (u_p^* + 0)(x_n - x_n^{(0)})]}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}} -$$

$$- \frac{\partial^{(l)} f\,[x_1^{(0)} + (u_p^* - 0)(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n + (u_p^* - 0)(x_n - x_n^{(0)})]}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}}, \tag{7}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_n = \overline{0, l}$ и $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = l$; $p = \overline{1, s}$.

Записываем равенство (4) в виде

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \left[\int_0^{u_1^*} + \int_{u_1^*}^{u_2^*} + \ldots + \int_{u_{s-1}^*}^{u_s^*} + \int_{u_s^*}^{1} \right]. \tag{8}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int u^k (u-1)^m F^{(k+m+1)}(u)\, du = \sum_{j=0}^{k+m} (-1)^j [u^k (u-1)^m]^{(j)} F^{(k+m-j)}(u) + C. \tag{9}$$

Затем

$$[u^k (u-1)^m]^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \frac{k!}{(k-j+i)!} \frac{m!}{(m-i)!} u^{k-j+i} (u-1)^{m-i}. \tag{10}$$

Учитывая равенства (9), (10), из формулы (8) получаем

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \left[\sum_{j=0}^{k+m} (-1)^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \frac{k!}{(k-j+i)!} \times \right.$$

$$\times \frac{m!}{(m-i)!} u^{k-j+i} (u-1)^{m-i} F^{(k+m-j)}(u) \Big|_0^{u_1^*} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j=0}^{k+m} (-1)^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \frac{k!}{(k-j+i)!} \times$$

$$\times \frac{m!}{(m-i)!} u^{k-j+i} (u-1)^{(m-i)} F^{(k+m-j)}(u)\Big|_{u_s^*}^{1}\Bigg] \tag{11}$$

или

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \times$$

$$\times \Bigg[-\sum_{j=k}^{k+m} (-1)^j C_j^{j-k} \frac{k!m!}{(m+k-j)!} (-1)^{m+k-j} F^{(m+k-j)}(0) +$$

$$+ \sum_{j=m}^{k+m} (-1)^j C_j^m \frac{k!m!}{(m+k-j)!} F^{(m+k-j)}(1) - \Delta'_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) \Bigg], \tag{12}$$

где

$$\Delta'_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+m} (-1)^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \frac{k!}{(k-j+1)!} \times$$

$$\times \frac{m!}{(m-i)!} u_p^{*k-j+i} (u_p^* - 1)^{m-i} [F^{(k+m-j)}(u_p^* + 0) - F^{(k+m-j)}(u_p^* - 0)]. \tag{13}$$

При $m + k - j = \nu$ формула (12) примет вид

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{k+m} C_{m+k-\nu}^{k} \frac{k!m!}{\nu!} F^{(\nu)}(0) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{m+k-\nu} C_{m+k-\nu}^{m} \frac{m!k!}{\nu!} F^{(\nu)}(1) - \Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n). \tag{14}$$

Соответственно

$$\Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \Delta'_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{p=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{k+m} (-1)^{\nu} \sum_{i=0}^{k+m-\nu} C_{k+m-\nu}^{i} \frac{k!m!}{[\nu-(m-i)]!\,(m-i)!\,(k+m)!} \times$$

$$\times u_p^{*\,\nu-(m-i)} (u_p^* - 1)^{m-i} [F^{(\nu)}(u_p^* + 0) - F^{(\nu)}(u_p^* - 0)]. \tag{15}$$

Преобразуем формулу (14):

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\dfrac{m!}{\nu!\,(m-\nu)!}}{\dfrac{(m+k)!}{\nu!\,(m+k-\nu)!}} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{\dfrac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}}{\dfrac{(k+m)!}{\nu!\,(k+m-\nu)!}} \frac{F^{(\nu)}(1)}{\nu!} - \Delta_{m,k}$$

или

$$R_{k,m}(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \frac{F^{(\nu)}(1)}{\nu!} +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{k+m}^\nu} \frac{F^{(\nu)}(1)}{\nu!} - \Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Представим (16) в виде

$$\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{k+m}^\nu} \frac{F^{(\nu)}(1)}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \times$$

$$\times \frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!} + \Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) + R_{m,k}(x_1, \ldots, x_n). \tag{17}$$

На основании формул (2), (3) имеем

$$F^{(\nu)}(1) = \nu! \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} \frac{\partial^{(\nu)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!},$$

$$F^{(\nu)}(0) = \nu! \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} \frac{\partial^{(\nu)} f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{C_k^\nu}{C_{k+m}^\nu} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} \frac{\partial^{(\nu)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_m^\nu}{C_{m+k}^\nu} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} \frac{\partial^{(\nu)} f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}} \times$$

$$\times \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!} + \Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) + R_{m,k}(x_1, \ldots, x_n). \tag{19}$$

Из формул (3) и (7) следует, что

$$F^{(\nu)}(u_p^* + 0) - F^{(\nu)}(u_p^* - 0) = \nu! \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} A_{s_1,\ldots,s_n,p}^{(\nu)} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{20}$$

Подставляя выражение (20) в формулу (15), имеем

$$\Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{p=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{k+m} (-1)^{\nu} \sum_{i=0}^{k+m-\nu} C_{k+m-\nu}^{i} \frac{k!m!\nu!}{[\nu-(m-i)]!\,(m-i)!\,(k+m)!} \times$$

$$\times u_p^{*\nu-(m-i)} (u_p^* - 1)^{m-i} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} A_{s_1,\ldots,s_n,p}^{(\nu)} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!} = \sum_{p=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{k+m} (-1)^{\nu} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{k+m-\nu} \frac{C_k^{\nu-(m-i)} C_m^i}{C_{k+m}^{\nu}} \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\nu \\ s_1,\ldots,s_n=\overline{0,\nu}}} A_{s_1,\ldots,s_n,p}^{(\nu)} B_{p,s_1,\ldots,s_n,i}, \tag{21}$$

где

$$B_{p,s_1,\ldots,s_n,i} = u_p^{*\nu-(m-i)} (u_p^* - 1)^{m-i} \frac{(x_1 - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{22}$$

Из формул (6) видно, что

$$u_p^* - 1 = \frac{x_{1_*}^{(p)} - x_1}{x_1 - x_1^{(0)}} = \cdots = \frac{x_{n_*}^{(p)} - x_n}{x_n - x_n^{(0)}}, \tag{23}$$

$$\frac{u_p^* - 1}{u_p^*} = \frac{x_{1_*}^{(p)} - x_1}{x_{1_*}^{(p)} - x_1^{(0)}} = \cdots = \frac{x_{n_*}^{(p)} - x_n}{x_{n_*}^{(p)} - x_n^{(0)}}. \tag{24}$$

На основании (23), (24)

$$B_{p,s_1,\ldots,s_n,i} = \left(\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}\right)^{m-i} \frac{(x_{1_*}^{(p)} - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_{n_*}^{(p)} - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{25}$$

Пусть $s_1 + s_2 + \ldots + s_{j_{m-i}} < m - i$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_{j_{m-i}} + s_{j_{m-i}+1} \geqslant m - i$, $1 \leqslant j_{m-i} \leqslant n - 1$. Тогда (25) запишем в виде

$$B_{p,s_1,\ldots,s_{j_{m-i}},\ldots,s_n,i} = \left(\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}\right)^{s_1} \left(\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}\right)^{s_{j_{m-i}}} \times$$

$$\times \left(\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}\right)^{m-i-(s_1+\cdots+s_{j_{m-i}})} \left(\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}\right)^{s_1+\cdots+s_{j_{m-i}+1}-(m-i)} \times$$

$$\times \frac{(x_{1_*}^{(p)} - x_1^{(0)})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_{j_{m-i}*}^{(p)} - x_{j_{m-i}}^{(0)})^{s_{j_{m-i}}}}{s_{j_{m-i}}!} \times$$

$$\times \frac{(x_{(j_{m-i}+1)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+1}^{(0)})^{m-i-(s_1+\cdots+s_{j_{m-i}})} \times (x_{(j_{m-i}+1)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+1}^{(0)})^{s_1+\cdots+s_{j_{m-i}+1}-(m-i)}}{s_{j_{m-i}+1}!} \times \tag{26}$$

$$\times \frac{(x_{(j_{m-i}+2)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+2}^{(0)})^{s_{j_{m-i}+2}}}{s_{j_{m-j}+2}!} \cdots \frac{(x_{n_*}^{(p)} - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}.$$

Подставляя в (26) вместо $\frac{u_p^* - 1}{u_p^*}$ соответствующие значения из формул (24), получаем

$$B_{p,s_1,\ldots,s_{j_{m-i}},\ldots,s_n,i} = \frac{(x_{1_*}^{(p)} - x_1)^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(x_{j_{m-i}*}^{(p)} - x_{j_{m-i}})^{s_{j_{m-i}}}}{s_{j_{m-i}}!} \times$$

$$\times \frac{(x_{(j_{m-i}+1)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+1})^{m-i-(s_1+\cdots+s_{j_{m-i}})}}{s_{j_{m-i}+1}!} \times$$

$$\times (x_{(j_{m-i}+1)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+1}^{(0)})^{s_1+\cdots+s_{j_{m-i}+1}-(m-i)} \frac{(x_{(j_{m-i}+2)_*}^{(p)} - x_{j_{m-i}+2}^{(0)})^{s_{j_{m-i}+2}}}{s_{j_{m-i}+2}!} \times$$

$$\times \frac{(x_{n_*}^{(p)} - x_n^{(0)})^{s_n}}{s_n!}. \tag{27}$$

Учитывая (27), формулу (21) можно представить в виде

$$\Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{k+m} (-1)^\nu \sum_{i=0}^{k+m-\nu} \frac{C_k^{\nu-(m-i)} C_m^i}{C_{k+m}^\nu} \times$$

$$\times \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_{j_{m-i}}+\cdots+s_n=\nu \\ s_1+\cdots+s_{j_{m-i}}<m-i \\ s_1+\cdots+s_{j_{m-i}+1}s_{j_{m-i}+1}\geqslant m-i.}} A_{s_1,\ldots,s_{j_{m-i}},\ldots,s_n,p}^{(\nu)} B_{p,s_1,\ldots,s_{j_{m-i}},\ldots,s_n,i}. \tag{28}$$

Итак, формула Обрешкова для функций, имеющих скачки 1-го рода, принимает вид (19), где $\Delta_{m,k}(x_1, \ldots, x_n)$ выражается формулами (27), (28), а $R_{m,k}(x_1, \ldots, x_n)$ — формулой (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванел В. К. Формула Обрешкова, ее обобщение и приложение. В кн.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе. Труды науч. конференции. Канев, 1974, с. 184—188.
2. Литвин О. М., Рвачев В. Л. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування.— К.: Наук. думка, 1973.
3. Obreschkoff N. Neue Quadraturformeln, Abhandlungen preuß. Akad. Wiss. Math.— Natur. wiss. Klasse., 1940, № 4, p. 1—20.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию 2.IX 1976 г.
после переработки — 15.X 1979 г.