УДК 517.521.8

А. Ф. Нагайник

Включение метода суммирования $|W, p|$ в метод $|A^*|$ и тауберовы теоремы

Пусть $\{s_n\}$— последовательность комплексных чисел, (W, p) и (A^*) — методы суммирования, определенные в книге [1, с. 88, 91]. В статье [2] для регулярных методов суммирования (W, p) и (A^*) доказано включение (W, p) в (A^*). В работе [3] этот результат обобщен на комплексные методы (W, p) с $P_n=0$ (1). В настоящей работе доказаны аналоги этих теорем для абсолютной суммируемости соответствующими методами. Как следствия из них получены тауберовы теоремы для абсолютной суммируемости методом (W,p).

Будем говорить, что последовательность $\{s_n\}$ абсолютно суммируема методом (W,p), или $|W,p|$-суммируема, если $\sum\limits_n |t_n - t_{n-1}| < \infty$, где $t_n = \frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k}s_k$, p_n $(n=0, 1, \dots)$ — комплексные числа, $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \neq 0$ $(n=0, 1, \dots)$. $|W,p|$-пределом последовательности s_n называем $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$. Последовательность $\{s_n\}$ называется $|A^*|$-суммируемой, если ряд $f(x) = (1-x)\sum\limits_n s_n x^n$ имеет радиус сходимости $r>0$ и определяет аналитическую функцию при $0 \leqslant x < 1$ и $\int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx < \infty$. При этом $|A^*|$-пределом последовательности s_n называем $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$. Будем говорить, что $|W,p| \subset |A^*|$, если из $|W,p|$-суммируемости последовательности s_n следует ее $|A^*|$-суммируемость, причем к той же сумме.

Теорема 1. *Пусть при* $0<x<1$ *выполняются условия:* $\sum\limits_n |P_n| x^n < \infty$, $\sum\limits_n |P_n| x^n = O(P(x))$, $P(x)\neq 0$. *Тогда из* $|W,p|$*-суммируемости последовательности следует ее* $|A^*|$*-суммируемость.*

В условиях теоремы при $0<x<r$ (A)-средние последовательности s_n[1, с. 20] выражаются через (W, p)-средние с помощью преобразования (см. [2])

$$f(x) = \frac{\sum\limits_n P_n t_n x^n}{P(x)}. \tag{1}$$

Если последовательность s_n (W, p)-суммируема, то $t_n = O(1)$ Тогда $\Sigma |P_n t_n| x^n < \infty$ при $0<x<1$ и функция $f(x)$ аналитически продолжима вдоль вещественной оси на $(0, 1)$. Для того чтобы преобразование (1) сохраняло абсолютную сходимость, необходимо и достаточно выполнения условия [4]

$$\mu_m = \int\limits_0^1 \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{\sum\limits_{k=m}^{\infty} P_k x^k}{P(x)} \right) \right| dx = O(1) \qquad (m \geqslant 0).$$

Имеем

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dx} \frac{\sum_{k=m}^{\infty} P_k x^k}{P(x)} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m-1} (k-\nu) P_k P_\nu x^{k+\nu-1}}{(P(x))^2} \right| dx =$$

$$= O(1) \int_0^1 \frac{\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m-1} (k-\nu) |P_k| |P_\nu| x^{k+\nu-1}}{(\Sigma |P_\nu| x^\nu)^2} dx =$$

$$= O(1) \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\sum_{k=m}^{\infty} |P_k| x^k}{\Sigma |P_\nu| x^\nu} \right) dx = O(1) \left[\frac{\sum_{k=m}^{\infty} |P_k| x^k}{\Sigma |P_\nu| x^\nu} \right]_0^1 = O(1).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $P(x) \to \infty$ $(x \to 1-0)$. *Тогда* $|W, p| \subset |A^*|$.

Действительно, в условиях следствия в силу теоремы 2.3.2 из [5] преобразование (1) регулярно. Отсюда и из теоремы 1 следует, что $|W, p| \subset$ $\subset |A^*|$.

Метод суммирования $|W, p|$ абсолютно регулярен тогда и только тогда, когда выполнены условия [6] $p_n = o(P_n)$ и $\sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{P_{n-m}}{P_n} - \frac{P_{n-m-1}}{P_{n-1}} \right| =$ $= O(1)$. Тогда, если P_n либо вещественны, либо комплексные и ограничены, а метод $|W, p|$ абсолютно регулярен, то $P(x) \to \infty$ $(x \to 1-0)$, так как $P_n \to P \neq 0$ $(n \to \infty)$ [5, 6], и $\Sigma |P_n| x^n = O(P(x))$ в силу условия $p_n = o(P_n)$. Поэтому справедливы такие следствия.

Следствие 2. *Пусть* P_n *вещественны,* $P(x) \neq 0$ *при* $0 < x < 1$ *и метод суммирования* $|W, p|$ *абсолютно регулярен. Тогда* $|W, p| \subset |A^*|$.

Следствие 3. *Пусть* P_n *комплексные,* $P_n = O(1)$, $P(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$ *и метод суммирования* $|W, p|$ *абсолютно регулярен. Тогда* $|W, p| \subset |A^*|$.

Следствие 4. *Пусть* $p_n \geqslant 0$ *и* $|W, p|$ *абсолютно регулярен. Тогда* $||W, p| \subset |A^*|$.

Теорема 1 позволяет получить теоремы тауберова типа для метода $|W, p.|$

Теорема 2. *Пусть ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *суммируется методом* $|W, p|$, *удовлетворяющим условиям теоремы* 1, *и*

$$a_n = 0 \text{ при } n \neq n_k, \text{ где } \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1. \tag{2}$$

Тогда ряд Σa_n *абсолютно сходится.*

Действительно, по теореме 1 ряд Σa_n суммируется методом $|A^*|$, а в силу условия (2) и теоремы Адамара [1, с. 258] ряд $\Sigma a_n x^n$ сходится в единичном круге. Тогда Σa_n $|A|$-суммируем, и теорема 2 следует из известного результата для метода $|A|$ [7].

Теорема 3. *Пусть ряд* Σa_n *суммируется методом* $|W, p|$, *удовлетворяющим условиям теоремы* 1, *и*

$$\sum_n \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k \right| < \infty. \tag{3}$$

Тогда ряд Σa_n абсолютно сходится.

Из условия (3) следует, что ряд $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} ka_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)$ сходится. Тогда $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = O(1)$, а значит, $a_n = O(1)$ и ряд $\Sigma a_n x^n$ сходится в единичном круге. По теореме 1 Σa_n $|A^*|$-суммируем, а значит, и $|A|$-суммируем, и теорема 3 следует из теоремы 1 [8].

Следствие 5. *Пусть ряд Σa_n суммируется методом $|W, p|$, удовлетворяющим условиям теоремы 1, и*

$$\sum_n |na_n - (n-1)a_{n-1}| < \infty.$$

Тогда ряд Σa_n абсолютно сходится.

Для регулярного положительного метода $|W, p|$ теорема 3 известна [9].

Теорему 1 можно перенести на суммирование интегралов. Будем говорить, что функция $s(t)$, ограниченная и измеримая на каждом конечном интервале, суммируется методом $|W, p|$, если $\displaystyle\int_0^\infty |\sigma'(x)|\,dx < \infty$, где $\sigma(x) = \displaystyle\frac{1}{P(x)}\int_0^x p(x-t)\,s(t)\,dt$, $P(x) = \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt \neq 0$ $(x > 0)$, $p(x)$ — вещественная функция, непрерывная вместе с $p'(x)$ на каждом конечном интервале. $|W, p|$-пределом функции $s(t)$ называем $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma(x)$. Будем говорить, что $s(t)$ $|A^*|$-суммируема, если $x\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}s(t)\,dt$ абсолютно сходится для $x > x_0 > 0$ и определяет функцию $f(x) = x\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}s(t)\,dt$, аналитически продолжаемую вдоль вещественной оси до нуля, и если $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|\,dx < \infty$. $|A^*|$-пределом функции $s(t)$ называем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Теорема 4. *Пусть при $0 < x < \infty$ выполнены условия*

$$\int_0^\infty e^{-xy}|P(y)|\,dy < \infty,\quad Q(x) = \int_0^\infty e^{-xy}P(y)\,dy \neq 0$$

и $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}|P(y)|\,dy = O(Q(x))$. *Тогда из $|W, p|$-суммируемости функции следует ее $|A^*|$-суммируемость.*

Равенство

$$f(x) = \frac{\int_0^\infty e^{-xt}P(t)\,\sigma(t)\,dt}{\int_0^\infty e^{-xt}P(t)\,dt} \tag{4}$$

при $x > x_0$ определяет (A)-средние функции $s(t)$ через ее (W, p)-средние [2]. В условиях теоремы функция $f(x)$ аналитически продолжима на $(0, x_0)$

Для абсолютной консервативности преобразования (4) необходимо и достаточно выполнения условия [10, теорема 3]

$$\mu(y)=\int\limits_0^\infty\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y\frac{e^{-xt}P(t)\,dt}{Q(x)}\right)\right|dx=O(1).$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y\frac{e^{-xt}P(t)\,dt}{Q(x)}\right)=\int\limits_0^y e^{-xt}P(t)\,dt\int\limits_y^\infty(\nu-t)\,e^{-x\nu}P(\nu)\,d\nu.$$

Тогда

$$\mu(y)\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{\int\limits_0^y e^{-xt}\,|P(t)|\,dt\int\limits_y^\infty(\nu-t)\,e^{-x\nu}\,|P(\nu)|\,d\nu}{|Q(x)|^2}\,dx=$$

$$=O(1)\int\limits_0^\infty\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^y\frac{e^{-xt}\,|P(t)|\,dt}{\int\limits_0^\infty e^{-x\nu}\,|P(\nu)|\,dt}\right)\right)dx=O(1),$$

и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. Jurkat B. W., Peyerimhoff A. The consistency of Nörlund and Hausdorff methods.— Annals of Math., 1955, **62**, p. 498—503.
3. Kwee B. The relation between Nörlund and generalized Abel summability.— j. London Math. Soc., 1963. **38**, N 4, p. 472—476.
4. Слепенчук К. М., Удалая Н. И. Абсолютная суммируемость рядов матричными методами.— Изв. вузов. Математика, 1974, № 6, с. 65—73.
5. Abraham Z. Inclusion relation between power methods of limitation. Pacif. J. Math., 1967, **67**, N 1, p. 251—275.
6. Kwee B. Absolute regularity of the Nörlund mean. — j. Austral. Math. Soc., 1965, **5**, p. 1—7.
7. Zygmund A. On certain integrals.— Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, N 2, p. 170—204.
8. Слепенчук К. М. Теоремы тауберова типа для абсолютной суммируемости методами Абеля.— Изв. вузов. Математика, 1965, № 6, с. 135—139.
9. Bhatt N. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability .— Мат. вестник, 1964, **1**, N 4, 333—334.
10. Tatchell J. B. On some integral transformations. — Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, p. 257—266.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 12.VI 1978 г., после переработки 28.II 1979 г.