УДК 517.947.5.37

М. А. Рыбак

Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма-Лиувилля

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в нем, $\|\cdot\|$ — норма. Пусть также $L_2 = L_2(H, (0, b)) \oplus \oplus H$ $(b < \infty)$, где $L_2(H, (0, b))$ — пространство вектор-функций $y(t)$ $(t \in [0, b])$, для которых $\int\limits_0^b \| y(t) \|^2 dt < \infty$. Скалярное произведение в $L_2(H, (0, b))$ определяется как $\int\limits_0^b (y(t), z(t))\, dt$.

Рассмотрим задачу

$$-y'' + Ay + q(t)\, y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y'(0) + \lambda y(0) = 0, \tag{2}$$

$$\cos C y'_b - \sin C y_b = 0, \tag{3}$$

где A — самосопряженный положительный оператор в H (можно считать $A \geqslant E$, E — тождественный оператор), C — самосопряженный, а $q(t)$ при каждом t — самосопряженный ограниченный оператор в H.

С задачей (1)—(3) в пространстве L_2 можно связать самосопряженный оператор L_C (см. [1]). При условии, что спектр оператора A дискретен, как показано в той же работе [1], L_C имеет чисто дискретный спектр тогда и только тогда, когда $\cos C$ вполне непрерывен в H.

Цель этой работы — изучить асимптотическое распределение собственных значений оператора L_C, зная асимптотическое распределение собственных чисел операторов A и $\cos C$.

При $q(t) \equiv 0$, $C = \frac{\pi}{2} E$ задача (1)—(3) запишется в виде

$$-y'' + Ay = \lambda y \tag{1'}$$

$$y'(0) + \lambda y(0) = 0 \tag{2'}$$

$$y(b) = 0. \tag{3'}$$

Соответствующий оператор обозначим L_D^0.

Предположим, что собственные числа оператора A $\lambda_n(A) = \mu_n \sim \sim an^\alpha$ ($n \to \infty$, $0 < a$, $\alpha = \mathrm{const}$). Всякое решение задачи (1′), (3′) представимо (см. [1]) в виде

$$y(t) = \operatorname{sh} \sqrt{A - \lambda E}\,(b - t)\, e^{-\sqrt{A}b} f, \quad f \in H_{\frac{1}{2}},$$

(H_α — шкала гильбертовых пространств, построенная по оператору A (см. [2])). Для того, чтобы оно удовлетворяло еще (2′), необходимо и достаточно, чтобы

$$D(\lambda, A) f = 0, \tag{4}$$

где $D(\lambda, A) = (-\sqrt{A - \lambda E} \operatorname{ch} \sqrt{A - \lambda E} b + \lambda \operatorname{sh} \sqrt{A - \lambda E} b)\, e^{-\sqrt{A}b}$.
При каждом λ $D(\lambda, A)$ — функция от оператора A. Поэтому равенство (4) выполняется тогда и только тогда (см. [3]), когда $D(\lambda, \mu_k) = 0$ ($\lambda \neq \mu_k$), т. е.

$$-\sqrt{\mu_k - \lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\mu_k - \lambda} b + \lambda \operatorname{sh} \sqrt{\mu_k - \lambda} b = 0 \tag{5}$$

хотя бы при одном μ_k. Таким образом, спектр оператора L_D^0 состоит из тех вещественных $\lambda \neq \mu_k$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют (5). Отыщем собственные значения оператора L_D^0, меньшие μ_k. Уравнение (5) в этом случае эквивалентно $-x \operatorname{cth} xb + \mu_k - x^2 = 0$, где $x = \sqrt{\mu_k - \lambda}$ ($0 < x < \sqrt{\mu_k}$). Обозначим $f_k(x) = -x \operatorname{cth} bx + \mu_k - x^2$.

Производная $f_k'(x) = \dfrac{bx - 2x \operatorname{sh}^2 bx - \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} bx}{\operatorname{sh}^2 bx} < 0$ при $x > 0$, ибо $\operatorname{sh} x > x$. Учитывая, что $f_k(0) = -\dfrac{1}{b} + \mu_k > 0$ при $\mu_k > \dfrac{1}{b}$, $f_k(\sqrt{\mu_k}) < 0$ и функция $f_k(x)$ монотонно убывает, заключаем, что в промежутке $(0, \sqrt{\mu_k})$ $f_k(x)$, начиная с некоторого k, имеет точно один корень x_k. Покажем, что x_k асимптотически ведет себя как $\sqrt{\mu_k} - \dfrac{1}{2}$. В самом деле, при $\varepsilon > 0$

$$\frac{f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon} =$$

$$= \frac{\left(-\sqrt{\mu_k} + \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \operatorname{cth} b \left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \mu_k - \left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2}{\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon} =$$

$$= -\operatorname{cth} b \left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) + \frac{2\sqrt{\mu_k}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon}$$

при $k \to \infty$ стремится к $2\varepsilon > 0$, а следовательно $f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \dfrac{1}{2} - \varepsilon\right) > 0$.

Аналогично $\dfrac{f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} + \varepsilon} \to -2\varepsilon < 0$, т. е. $f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right) < 0$.

Таким образом, x_k лежит между $\sqrt{\mu_k}-\frac{1}{2}-\varepsilon$ и $\sqrt{\mu_k}-\frac{1}{2}+\varepsilon$ и, в силу произвольности ε, $x_k-\left(\sqrt{\mu_k}-\frac{1}{2}\right)\underset{k\to\infty}{\to}0$, откуда следует, что $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\sim} \sqrt{\mu_k}$, где $\lambda_k=\mu_k-x_k^2$.

Отыщем те решения уравнения (5), которые больше μ_k. В этом случае это уравнение можно записать в виде $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda-\mu_k}\,b=\lambda/\sqrt{\lambda-\mu_k}$, или, делая замену $\sqrt{\lambda-\mu_k}=x$ $(x\in(0,\infty))$, $\operatorname{ctg} xb=(\mu_k+x^2)/x$.

Рассмотрим функцию $u_k(x)=\dfrac{x\operatorname{ctg} xb-\mu_k-x^2}{x}=\dfrac{\varphi_k(x)}{x}$, где $\varphi_k(x)=x\operatorname{ctg} xb-\mu_k-x^2$. Нули функций $u_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ совпадают. Поскольку в каждом промежутке $\left(\frac{\pi n}{b}, \frac{\pi(n+1)}{b}\right)$ $(n=1,2,\ldots)$ $\varphi_k(x)$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а ее производная

$$\varphi_k'(x)=\frac{\cos bx\sin bx-bx-2x\sin^2 bx}{\sin^2 bx}<0,$$

то в нем $\varphi_k(x)$ имеет только один нуль $x_{n,k}$: $\frac{\pi n}{b}<x_{n,k}<\frac{\pi(n+1)}{b}$. Поэтому

$$\lambda_{n,k}=\mu_k+x_{n,k}^2=\mu_k+\gamma_n,$$

где $\gamma_n\sim\frac{n^2}{b^2}\pi^2$. В интервале $\left(0,\frac{\pi}{b}\right)$, как нетрудно видеть, $u_k(x)<0$ и потому в нем нет корней. Итак, приходим к утверждению.

Лемма. *Собственные числа задачи* (1′) — (3′) *распадаются на две серии:* $\lambda_k\sim\sqrt{\mu_k}$; $\lambda_{k,n}=\mu_k+\gamma_n$, *где* $\gamma_n\sim\frac{\pi^2}{b^2}n^2$.

2. Пусть B — произвольный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. s-Числами оператора B называются собственные значения оператора $(B^*B)^{1/2}$: $s_j(B)=\lambda_j((B^*B)^{1/2})$. Если B нормальный, то $s_j(B)=|\lambda_j(B)|$. s-Числа обладают такими свойствами:

1) для произвольного ограниченного оператора T

$$s_j(TB)\leqslant\|T\|s_j(B),\quad s_j(BT)=\|T\|s_j(B);$$

2) если операторы B_1 и B_2 вполне непрерывны, то

$$s_{m+n+1}(B_1+B_2)\leqslant s_m(B_1)+s_n(B_2),\quad s_{m+n-1}(B_1B_2)\leqslant s_m(B_1)\,s_n(B_2);$$

3) если B_1, B_2 вполне непрерывны и $s_n(B_1)\sim\frac{a}{n^\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha s_n(B_2)=0$

$0<a$, $\alpha<\infty$), то $s_n(B_1+B_2)\sim\frac{a}{n^\alpha}$.

Через $N(\lambda, L_D^0)$ обозначим функцию распределения собственных значений оператора L_D^0: $N(\lambda,L_D^0)=\sum\limits_{\lambda_j(L_D^0)<\lambda}1=N_1(\lambda)+N_2(\lambda)$, где $N_1(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_k<\lambda}1$, $N_2(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_{k,n}<\lambda}1$. Поскольку $\mu_k\sim ak^\alpha$, то $\sqrt{\mu_k}\sim\sqrt{a}k^{\alpha/2}$; поэтому (см. [4]) $N_1(\lambda)\sim\frac{1}{a^{\alpha/2}}\lambda^{2/\alpha}$, $N_2(\lambda)\sim B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha+2}\,\frac{\pi}{ba^{\alpha/2}}\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$, где $B(p,q)$ — бэта-функция Эйлера. Следовательно,

$$N(\lambda,L_D^0)\sim\frac{1}{a^{\alpha/2}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}+B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\pi}{ba^{\alpha/2}(\alpha+2)}\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}.$$

Таким образом, если $\alpha > 2$, то $N(\lambda, L_D^0) \sim B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\pi}{ba^{\alpha/2}(\alpha+2)} \lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}$ и, следовательно,

$$\lambda_n(L_D^0) \sim dn^\delta \left(d = \left[B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\pi}{ba^{\alpha/2}(\alpha+2)}\right]^{\frac{-2\alpha}{2+\alpha}}, \ \delta = \frac{2\alpha}{\alpha+2}\right). \qquad (6')$$

Если же $\alpha < 2$, то $N(\lambda, L_D^0) \sim \frac{1}{a^{\alpha/2}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}}$ и, следовательно,

$$\lambda_n(L_D^0) \sim dn^\delta \left(d = a^{\alpha^2/4}, \ \delta = \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (6'')$$

При $\alpha = 2$

$$N(\lambda, L_D^0) \sim \left[\frac{1}{a} + B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4b2^{\alpha/2}}\right]\lambda = \left(\frac{1}{a} + \frac{\pi^2}{4b2^{\alpha/2}}\right)\lambda;$$

$$\lambda_n(L_D^0) \sim dn^\delta \left(d = \left[\frac{1}{a} + \frac{\pi^2}{8b}\right]^{-1}, \ \delta = 1\right). \qquad (6''')$$

3. Если $q(t) \not\equiv 0$, то соответствующий задаче (1), (2), (3′) оператор $L_D = L_D^0 + Q$, где $Q: Q\{y(t), y(0)\} = \{q(t)\,y(t), 0\}$ — ограниченный самосопряженный оператор в L_2. Резольвенты операторов L_D и L_D^0 связаны между собой соотношением

$$R_\lambda(L_D) = R_\lambda(L_D^0) - R_\lambda(L_D)\,QR_\lambda(L_D^0) \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0),$$

(см. [3]). Поскольку $\lambda_n(R_\lambda(L_D^0)) \sim \frac{1}{d} n^{-\delta}$, то из свойств s-чисел 1) и 2) следует, что

$$|\lambda_n(R_\lambda(L_D))| \leqslant d_1 n^{-\delta},$$

$$|\lambda_n(R_\lambda(L_D)\,QR_\lambda(L_D^0)| \leqslant d_2 n^{-2\delta} \, (0 < d_1, \ d_2 = \text{const} < \infty).$$

Применяя далее свойство s-чисел 3), получаем, что $\lambda_n(L_D) \sim dn^\delta$. Используя тождество для резольвент различных самосопряженных расширений абстрактного симметрического оператора и оценки для s-чисел операторов, участвующих в этом тождестве, из [5] нетрудно прийти к следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $\lambda_n(A) \sim an^\alpha$ $(0 < a, \ \alpha = \text{const})$. *Для того, чтобы* $|\lambda_n(L_C)| \sim \lambda_n(L_D) \sim dn^\delta$, *где*

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha+2} & \text{при } \alpha > 2, \\ \dfrac{\alpha}{2} & \text{при } \alpha < 2, \\ 1 & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

а d — константа, фигурирующая в формулах (6′)—(6‴), *достаточно, чтобы* $\cos C$ *был вполне непрерывным в* H *и* $\lim\limits_{n\to\infty} n^\delta s_n(\cos C) = 0$.

Из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие. *Задача*

$$-y'' + Ay + q(t)\,y = \lambda y,$$

$$y'(0) + \lambda y(0) = 0, \quad y'(b) + By(b) = 0,$$

где B — *самосопряженный ограниченный оператор, имеет дискретный спектр, и ее собственные числа* $|\lambda_n| \sim dn^\delta \sim \lambda_n(L_D)$.

В самом деле, в этом случае $\cos C = S^{-1}(E + S^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, где $S = A^{\frac{1}{4}}(B + A^{\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{4}}$, поэтому $s_n(\cos C) \leqslant cn^{-\alpha}$ $(c = \text{const})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачук В. І., Рибак М. О. Про самоспряжені розширення мінімального оператора, породженого виразом Штурма—Ліувілля з операторним потенціалом і неоднорідною граничною умовою.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 4, с. 300—304.
2. Лионс Ж.— Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит. 1962.— 895 с.
4. Михайлец В. А. Уточнение асимптотических формул для спектра оператора Лапласа в областях вида $G = G_1 \times G_2$ — Успехи. мат. наук, 1978, 33, № 4, с. 219—221.
5. Брук В. М. О расширениях симметрических отношений.— Мат. заметки, 1977, 22, № 6, с. 825—834.

Киевский
торгово-экономический институт

Поступила в редакцию
18.V 1979 г.