УДК 519.21

В. Н. Супрун, В. М. Шуренков

Предельное распределение положения в момент выхода из интервала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с нулевым средним и бесконечной дисперсией

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями и отрицательными скачками такой, что

$$\mathbf{M} e^{s[\xi(t)-\xi(0)]} = \exp[tK(s)] = \exp\left\{t\left[ms + bs^2 + \int\limits_{-\infty}^{0} (e^{sy} - 1 - sy)\,\Pi(dy)\right]\right\}, \tag{1}$$

где $s \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, а мера Π такова, что $\int\limits_{-1}^{0} y^2\Pi(dy) - \int\limits_{-\infty}^{-1} y\Pi(dy) < \infty$. Тогда $tK'(0) = mt$ — среднее значение, а $tK''(0) = \sigma^2 t$, где $\sigma^2 = 2b + \int\limits_{-\infty}^{0} y^2\Pi(dy)$ — дисперсия приращения $\xi(t) - \xi(0)$.

Будем предполагать, что процесс $\xi(t)$ не монотонный и его траектории непрерывны справа.

В работах [1, 2] распределение положения процесса $\xi(t)$ в момент выхода из интервала изучалось в предположении, что дисперсия конечна.

Мы рассматриваем ситуацию, когда $m = 0$ и

$$K(s) = s^{\alpha} L\left(\frac{1}{s}\right), \tag{2}$$

где $1 < \alpha < 2$, а $L(x)$ медленно меняется при $x \to \infty$. Пусть ζ и ζ_T — моменты первого выхода процесса $\xi(t)$ из интервала $(0, \infty)$ и из интервала $(0, T)$ соответственно, то есть $\zeta = \inf\{t : \xi(t) \leqslant 0\}$, $\zeta_T = \inf\{t : \xi(t) \notin (0, T)\}$. Обозначим через $\mathbf{P}_x$ условную вероятность при условии $\xi(0) = x$.

Лемма. *Пусть неубывающая непрерывная при $x > 0$ функция $R(x)$ определена соотношением*

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-sx} R(x)\,dx = \frac{1}{K(s)}, \qquad s > 0. \tag{3}$$

Тогда, если $m = 0$, то

1) *при $x > 0$, $z < 0$*

$$\mathbf{P}_x\{\xi(\zeta) < z\} = R(x)\int\limits_0^{\infty} \Pi(-\infty, z-y)\,dy - \int\limits_0^{x} R(x-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy;$$

2) *при* $x \in (0, T)$, $z < 0$

$$\mathbf{P}_x\{\xi(\zeta_T) < z\} = \frac{R(x)}{R(T)} \int_0^T R(T-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy - \\ - \int_0^x R(x-y)\,\Pi(-\infty, z-y)\,dy.$$

Доказательство леммы можно найти в [3].

В дальнейшем нам понадобится асимптотическое представление для $R(x)$ и $\Pi(-\infty, -x)$ при $x \to \infty$.

Теорема 1. *Если имеет место условие* (2), *то*

$$\Pi(-\infty, -x) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} L(x) \ \text{при}\ x \to \infty,$$

$$R(x) \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{x^{\alpha-1}}{L(x)} \ \text{при}\ x \to \infty,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Из (1), (2) имеем $K(s) = bs^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{sy} - 1 - sy)\,\Pi(dy)$. Разделив правую и левую части этого выражения на s^2 и выполнив несложные преобразования, получим $\frac{K(s)}{s^2} = b + \int_0^\infty e^{-sy}\,dy \times \int_0^\infty \Pi(-\infty, -x)\,dx$.

Обозначим $b + \int_0^\infty e^{-sy} p(y)\,dy = \varphi(s)$, где $p(y) = \int_y^\infty \Pi(-\infty, -x)\,dx$. Тогда $K(s) = s^2\varphi(s)$. В силу (2) функция $\varphi(s)$ имеет вид $\varphi(s) = s^{\alpha-2} L\left(\frac{1}{s}\right)$. Отсюда и из тауберовых теорем (см. [4, с. 512]) получаем

$$b + \int_0^x e^{-sy} p(y)\,dy \sim \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} |x|^{2-\alpha} L(x), \quad p(x) \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} |x|^{1-\alpha} L(x)$$

и, следовательно, $\Pi(-\infty, -x) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} |x|^{-\alpha} L(x)$. Далее, из (2), (3) имеем $\int_0^\infty e^{-sx}\,dR(x) = \frac{s^{1-\alpha}}{L(1/s)}$. Отсюда и из тауберовой теоремы (см. [4, с. 511]) находим, что $R(x) \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{x^{\alpha-1}}{L(x)}$ при $x \to \infty$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если имеет место условие* (2), *то*

$$1)\ \mathbf{P}_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} \to A\left\{\frac{|z|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^\alpha}\,dt\right\} \tag{4}$$

при $x \to \infty$.

$$2)\ \mathbf{P}_x\left\{\frac{\xi(\zeta_T)}{x} < z\right\} \to A\left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha}}\,dt - \int_0^{1/\beta} \frac{(1-\beta t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha}}\,dt\right\} \qquad (5)$$

при $x \to \infty$, $T \to \infty$, $\frac{x}{T} \to \beta$, *где* $z < 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $A = (\alpha - 1)\,\pi^{-1} \sin \pi\alpha$.

Доказательство. 1) Учитывая лемму и теорему 1, можно записать

$$\mathbf{P}_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = A\left[\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} L_1(zx-y)}{(zx-y)^{\alpha} L_1(x)}\,dy - \int_0^{x} \frac{(x-y)^{\alpha-1} L_1(zx-y)}{(zx-y)^{\alpha} L_1(x-y)}\,dy\right],$$

где $L_1(x)$ медленно меняется при $x \to \infty$.

Вводя в первом интеграле подстановку $zx - y = tx$, а во втором $y = tx$, получаем

$$\mathbf{P}_x\left\{\frac{\xi(\zeta)}{x} < z\right\} = A\left\{\int_{-\infty}^{z} \frac{L_1(tx)}{t^{\alpha} L_1(x)}\,dt + \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} L_1[(z-t)\,x]}{(t-z)^{\alpha} L_1[(1-t)\,x]}\,dt\right\}.$$

Такое представление позволяет перейти в этом выражении к пределу при $x \to \infty$ и с учетом свойств медленно меняющихся функций (см. [4, с. 511]) получаем требуемое.

Пункт 2) доказывается аналогично.

Обозначим правые части соотношений (4) и (5) через $F(z)$ и $F_\beta(z)$ соответственно.

Следствие.

$$1)\ 1 - F(0) = 1 - A\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^{\alpha}}\,dt;$$

$$1 - F_\beta(0) = 1 - A\left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^{\alpha}}\,dt - \int_0^{1/\beta} \frac{(1-\beta t)^{\alpha-1}}{t^{\alpha}}\,dt\right\}.$$

$$2)\ \frac{dF(z)}{dz} = A\left\{|z|^{-\alpha} + \alpha\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha+1}}\,dt\right\}, \qquad z < 0;$$

$$\frac{dF_\beta(z)}{dz} = \alpha A\left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha+1}}\,dt - \int_0^{1/\beta} \frac{(1-\beta t)^{\alpha-1}}{(t-z)^{\alpha+1}}\,dt\right\}, \qquad z < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Супрун В. Н. О величине первого перескока через нулевой уровень для однородного процесса с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 4, с. 317—320.
2. Шуренков В. М. Предельное распределение положения в момент выхода из широкого интервала для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, 22, № 2, с. 419—425.
3. Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М. Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, № 2, с. 251—259.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.— М.: Мир, 1967.— 752 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию
23.VIII 1978 г.