1980 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 32, № 3

УДК 519.21

А. В. Иванов, Н. Н. Леоненко

О принципе инвариантности для оценки корреляционной функции однородного случайного поля

В настоящей работе доказана теорема о сходимости распределений непрерывных в равномерной топологии функционалов от естественной оценки корреляционной функции однородного случайного поля с непрерывным параметром к распределениям функционалов от некоторого гауссовского поля. Для случайных процессов условия применимости принципа инвариантности к оценке корреляционной функции сформулированы в работе [1]. В работах [2—4] приведены различные варианты центральной предельной теоремы (ц.п.т.) для оценки корреляционной функции, а также для статистик более общего вида. Некоторые другие результаты по данному вопросу упомянуты в [1].

1. Обозначения и формулировка результата. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, а $\Pi[F,\ T]=\{x\in R^n: F_i\leqslant x_i\leqslant T_i,\ i=\overline{1,n}\}$ — параллелепипед ($F,\ T\in R^n$).

А. Рассмотрим фиксированный вектор $H\in R^n$ с положительными координатами. Пусть вектор $T\in R^n$ такой, что $\tilde{T}=\min\{T_i,\ i=\overline{1,n}\}\to\infty$. Пусть $\xi(x)$, $x\in\Pi[0,\ T+H]$ — наблюдения над действительным однородным в узком смысле, непрерывным в среднем квадратическом, измеримым и непрерывным с вероятностью единица случайным полем $\mathbf{M}\xi(x)=0$, $\mathbf{M}\xi^2(x)<\infty$, $\mathbf{M}\xi(0)\xi(h)=R(h)$.

Для оценки неизвестной корреляционной функции $R(h)$ по наблюдениям над полем $\xi(x)$, $x\in\Pi[0,\ T+h]$, рассмотрим статистику

$$\widehat{R}_T(h)=\left(\prod_{i=1}^{n}T_i\right)^{-1}\int\limits_{\Pi[0,T]}\xi(x)\,\xi(x+h)\,dx.$$

При выполнении условия A рассмотрим семейство случайных полей

$$X_T(h)=\left(\prod_{i=1}^{n}T_i\right)^{1/2}(\widehat{R}_T(h)-R(h)),\quad h\in\Pi[0,\ H]. \tag{1}$$

Пусть $\{P_T\}$ — вероятностные меры, индуцируемые семейством (1) в пространстве $C[0,\ H]$ непрерывных на $\Pi[0,\ H]$ функций от n переменных с равномерной топологией. Будем исследовать слабую сходимость мер $\{P_T\}$ при $\tilde{T}\to\infty$ к некоторой предельной гауссовой мере P, описанной ниже.

Для случайного поля $\xi(x)$ рассмотрим некоторые условия сильного перемешивания [5—6]. Если $S\subset R^n$, то символом $\mathfrak{R}(S)$ обозначим σ-алгебру, порожденную ансамблем случайных величин $\{\xi(x),\ x\in S\}$, символом $\rho(S,\ F)=\inf\{\|x-y\|,\ x\in S,\ y\in F\}$ — расстояние между произвольными множествами S и F из R^n, а $\alpha(\mathfrak{R}',\ \mathfrak{R}'')=\sup\{|P(AB)-P(A)P(B)|,\ A\in\mathfrak{R}',\ B\in\mathfrak{R}''\}$ — розенблаттовский коэффициент связи между σ-алгебрами $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}''$.

Выражение $\sup\alpha(\mathfrak{R}(\Pi_1),\ \mathfrak{R}(\Pi_2))$ обозначим символом $\alpha(r)$, если верхняя грань берется по всем параллелепипедам Π_1 и Π_2, таким, что $\rho(\Pi_1,\ \Pi_2)\geqslant$

$\geqslant r$, и символом $\alpha(r, d)$, если—по всем параллелепипедам Π_1 и Π_2 диаметра, не большего d, расположенным на расстоянии, не меньшем r.

Б. Пусть случайное поле $\xi(x)$, $x \in R^n$ такое, что

$$\mathbf{M}|\xi(x)|^{4+\delta} < \infty, \ \alpha(r, d) \leqslant c d^{\omega} r^{-n-\varepsilon}, \ \delta > 0, \tag{2}$$

при $d > d_0$, где $\varepsilon\delta > 4n$, $\omega < \delta(\varepsilon/n - 2/\delta)/(2+2\delta)$, c — некоторая постоянная.

Всюду ниже условие Б можно заменить следующим.

Б_1. Пусть случайное поле $\xi(x)$ такое, что $\mathbf{M}|\xi(x)|^{4+\delta} < \infty$ и $\alpha(r) = O(r^{-n-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\delta > 4n$.

Условие Б_1 приведено лишь для иллюстрации, ибо оно накладывает более сильные ограничения на поле $\xi(x)$, чем условие Б (см. [6, с. 716]).

Всюду в этой статье символами c, c_i обозначены положительные константы, не всегда одни и те же.

Если выполнено условие Б, то по лемме 17.2.2. [7, с. 389] корреляционная функция $R(h)$ при $\|h\| > 0$ допускает оценку $R(h) \leqslant c_2 \|h\|^{n+\varepsilon'}$, где $\varepsilon' > 0$. Следовательно, $R(h)$ интегрируема. Отсюда следует, что случайное поле $\xi(x)$ обладает непрерывной и ограниченной спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in R^n$.

В. Пусть $f(\lambda) > 0$ и для некоторого $\beta \in (0, 1]$ $I_1 = \int\limits_{R^n} \left(\prod\limits_{j=1}^{n} |\lambda_j| \right)^{1+\beta} f(\lambda) \times \times d\lambda < \infty$.

Если выполнено (2), то пусть $s_4(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = i^{-4} \dfrac{\partial^4}{\partial\mu_1 \partial\mu_2 \partial\mu_3 \partial\mu_4} \times \times \ln \mathbf{M} \exp\left\{ i \sum\limits_{j=1}^{4} \mu_j \xi(x^{(j)}) \right\} \Bigg|_{\mu_1 = \ldots = \mu_4 = 0}$ — семиинвариантная функция 4-го порядка случайного поля $\xi(x)$ (см., например, [8, 9]). Для λ, $x \in R^n$ обозначим символом $\langle \lambda, x \rangle$ скалярное произведение.

Г. Предположим, что существует спектральная плотность 4-го порядка $f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ случайного поля $\xi(x)$, т. е. интегрируемая на R^{3n} (в общем случае комплекснозначная) функция, такая, что для любого вектора $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in R^{3n}$, $x^{(j)} \in R^n$, $j = \overline{1, 3}$, $s_4(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, 0) = \int\limits_{R^{3n}} \exp\left\{ i \sum\limits_{j=1}^{3} \langle \lambda^{(j)}, x^{(j)} \rangle \right\} f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}) \prod\limits_{j=1}^{3} d\lambda^{(j)}$, где $\lambda^{(j)} \in R^n$, $j = \overline{1, 3}$. Пусть, кроме того, спектральная плотность $f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ удовлетворяет требованиям

$$\sup_{h \in R^n} \int\limits_{R^{2n}} \left(1 + \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(2)}| \right)^{(1+\gamma)/2} |f_4(\lambda^{(1)}, h - \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})| \, d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} < \infty \tag{3}$$

для некоторого $\gamma > 0$,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \int\limits_{R^{2n}} |f_4(\lambda^{(1)}, h - \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) - f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})| \, d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} = 0. \tag{4}$$

Отметим, что из (3) следует конечность интеграла

$$I_2 = \int\limits_{R^{2n}} \left| \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(2)} \right|^{(1+\gamma)/2} |f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})| \, d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)}.$$

Рассмотрим гауссовское случайное поле $X(h)$, $h \in \Pi[0, H]$, с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\rho(h^{(1)}, h^{(2)}) = (2\pi)^n \Big\{ \int\limits_{R^{2n}} \exp\{i(\langle\lambda^{(1)}, h^{(1)}\rangle + \langle\lambda^{(2)}, h^{(2)}\rangle)\} f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} +$$

$$+ \int\limits_{R^n} (\exp\{i\langle\lambda, h^{(1)} - h^{(2)}\rangle\} + \exp\{i\langle\lambda, h^{(1)} + h^{(2)}\rangle\}) f^2(\lambda)\, d\lambda \Big\}.$$

Лемма 1. *Если выполнено* (4), $f^2(\lambda)$ *интегрируема и*

$$\sup_{h\in R^n} \int\limits_{R^{2n}} |f_4(\lambda^{(1)}, h - \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})|\, d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} < \infty, \tag{5}$$

то при $T \to \infty$ $\lim \mathbf{M} X_T(h^{(1)}) X_T(h^{(2)}) = \rho(h^{(1)}, h^{(2)})$.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству теоремы 4.1 [8].

Для произвольной функции $f(h)$, $h \in R^n$ определим приращения $\Delta_f^{(n)}[y, x]$ по формуле

$$\Delta_f^{(n)}[y, x] = \sum_\nu (-1)^{|\nu|} f(y_1 - \nu_1(y_1 - x_1), \ldots, y_n - \nu_n(y_n - x_n)), \tag{6}$$

где $\sum\limits_\nu \ldots$ означает, что суммирование распространяется на все возможные значения булевого вектора $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, а $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$.

Нам понадобится лемма.

Лемма 2 [10, 11]. *Поле* $X(h)$, $h \in \Pi[0, H]$, *индуцирует меру в пространстве* $C[0, H]$, *если выполнены условия*:

1) *для всех* $0 \leqslant h_i^{(1)} < h_i^{(2)} \leqslant H_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathbf{M}|\Delta_X^{(n)}[h^{(2)}, h^{(1)}]|^p \leqslant c_3 \prod\limits_{i=1}^n |h_i^{(2)} - h_i^{(1)}|^{1+q}$, где $p > 0$, $q > 0$;

2) *найдутся такие* $z_i^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, *что для всех* $0 \leqslant h_i^{(1)} \leqslant h_i^{(2)} \leqslant H_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathbf{M}|X(z_1^{(0)}, \ldots, h_i^{(2)}, \ldots, z_n^{(0)}) - X(z_1^{(0)}, \ldots, h_i^{(1)}, \ldots, z_n^{(0)})|^p \leqslant c_4 |h_i^{(2)} - h_i^{(1)}|^{1+q}$, $i = \overline{1, n}$, *где* $p > 0$, $q > 0$.

Возвращаясь к гауссовскому полю $X(h)$, $h \in \Pi[0, H]$, индукцией по n устанавливаем, что

$$\mathbf{M}(\Delta_X^{(n)}[h^{(2)}, h^{(1)}])^2 \leqslant c_5 \Big\{ \int\limits_{R^{2n}} |T_1^{(n)}(h^{(1)}, h^{(2)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})|\, |f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})| d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} +$$

$$+ \int\limits_{R^n} T_2^{(n)}(h^{(1)}, h^{(2)}, \lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda \Big\}, \tag{7}$$

где

$$T_1^{(n)} = (\Delta^{(n)}_{\cos(\lambda^{(2)},\cdot)}[h^{(2)}, h^{(1)}])(\Delta^{(n)}_{\cos(\lambda^{(1)},\cdot)}[h^{(2)}, h^{(1)}]), \quad T_2^{(n)} = (\Delta^{(n)}_{\cos(\lambda,\cdot)}[h^{(2)}, h^{(1)}])^2.$$

Тогда

$$|T_2^{(n)}| \leqslant c_6 \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^{1+\beta} \right) \prod_{i=1}^n |h_i^{(2)} - h_i^{(1)}|^{1+\beta},$$

$$|T_1^{(n)}| \leqslant c_7 \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(2)}|^{(1+\gamma)/2} \right) \prod_{i=1}^n |h_i^{(2)} - h_i^{(1)}|^{1+\gamma}.$$

Подставляя полученные оценки в (7), получаем, что если интегралы I_1 и I_2 конечны, то

$$\mathbf{M}(\Delta_X^{(n)}[h^{(2)}, h^{(1)}])^2 \leqslant c_8 (I_1 + I_2) \prod_{i=1}^n |h_i^{(2)} - h_i^{(1)}|^{1+\min\{\beta, \gamma\}}$$

и, следовательно, выполнено условие 1) леммы 2. Аналогично проверяется условие 2) этой леммы. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Если выполнены условия* А, В, *и* Г (*в котором* (3) *и* (4) *нужно заменить условием конечности интеграла* I_2), *то гауссово поле* $X(h)$, $h \in [0, H]$ *с* $\mathbf{M}X(h) = 0$ *и корреляционной функцией* $\rho(h^{(1)}, h^{(2)})$ *индуцирует в пространстве* $C[0, H]$ *некоторую меру* P.

Основной результат статьи содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* А—Г. *Тогда меры* $P_{\tilde T}$ *при* $\tilde T \to \infty$ *слабо сходятся к мере* P *в пространстве* $C[0, H]$.

2. Доказательство теоремы 1. Сформулируем вначале один вариант ц.п.т. для случайных полей, принимающих векторные значения. Условие сильного перемешивания без труда распространяется на векторное случайное поле $\xi(x) = (\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x)) \in R^m$. Пусть также

$$\mathbf{M}\xi(x) = 0, \quad \mathbf{M}\xi(x)\,\xi'(x) < \infty, \tag{8}$$

а для $S, F \in R^n$ $\eta(S, F) = \left(\prod_{i=1}^{n} (F_i - S_i)\right)^{-1/2} \int\limits_{\Pi[S,F]} \xi(x)\,dx.$

Будем говорить, что к векторному полю $\xi(x) \in R^m$ применима ц. п. т. с параметрами (a, b), если существует предел $\lim \mathbf{M}\eta(S, F)\,\eta'(S, F) = b$ при $\min\{F_i - S_i,\ i = \overline{1, n}\} \to \infty$, а функция распределения $F_{S,F}(z)$ случайного вектора $\eta(S, F)$ такова, что $\lim F_{S,F}(z) = \Phi(z)$, где $\Phi(z)$—функция распределения многомерного гауссовского распределения с нулевым вектором средних и матрицей $b = (b_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,m}}$ вторых моментов.

Рассмотрим еще такое условие.

Б$_2$. Пусть векторное случайное поле $\xi(x)$ такое, что выполнено (8), причем

$$\mathbf{M}\,\|\xi(x)\|^{2+\delta} < \infty, \quad \delta > 0, \tag{9}$$

и выполнено условие сильного перемешивания с функцией $\alpha(r, d) \leqslant c d^{\omega} r^{-n-\varepsilon}$, где $d > d_0$, $\varepsilon\delta > 2n$, $\omega < \delta(\varepsilon/n - 2/\delta)/(2 + 2\delta)$.

Лемма 4. *Пусть случайное поле* $\xi(x) \in R^m$ *однородно в узком смысле и удовлетворяет условию* Б$_2$. *Тогда к случайному полю применима центральная предельная теорема с параметрами* $(0, (2\pi)^n f(0))$, *где* $f(\lambda) = (f_{ij}(\lambda))_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,m}}$ — *спектральная плотность поля* $\xi(x) \in R^m$.

Отметим, что лемма 4 непосредственно обобщает теорему 11.2 монографии [12] (относительно отсутствия условия, требующего, чтобы матрица $f(0)$ была невырожденной, см. [13, с. 246]).

Доказательство леммы 4 проводится многомерным вариантом метода секционирования С. Н. Бернштейна [5, 6] и отличается от доказательства теоремы 1 работы [6] лишь более сложными обозначениями.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения* А, Б *и поле* $\xi(x)$ *обладает спектральной плотностью* $f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$, *удовлетворяющей* (4) *и* (5). *Тогда для любых не совпадающих векторов* $h^{(i)} \in \Pi[0, H]$, $i = \overline{1, m}$, *вектор* $(X_T(h^{(1)}), \ldots, X_T(h^{(m)}))$ *при* $\tilde T \to \infty$ *слабо сходится к вектору* $(X(h^{(1)}), \ldots, X(h^{(m)}))$.

Доказательство. Рассмотрим поле $y(x, h) = \xi(x)\,\xi(x + h) - R(h)$. Случайное поле $y(x, h)$ при $h \in \Pi[0, H]$ однородно по x, а для $h^{(1)}, h^{(2)} \in \Pi[0, H]$ поля $y(x, h^{(1)})$ и $y(x, h^{(2)})$ однородно связаны. Поэтому для любого $m \geqslant 1$ вектор $y(x) = (y(x, h^{(1)}), \ldots, y(x, h^{(m)}))$ — m-мерное случайное поле. Далее применяется лемма 4 к случайному полю $y(x) \in R^m$. При проверке условий леммы 4 используется тот факт, что если x находится в достаточной малой окрестности нуля, то для некоторого $\varepsilon' > 0$ выражение

$|\mathbf{M}\xi(x)\,\xi(x+h^{(i)})\,\xi(0)\,\xi(h^{(j)})-R(h^{(i)})\,R(h^{(j)})|$ мажорируется выражением $c(\|x+ h^{(i)}/2-h^{(j)}/2\|-\|h^{(i)}\|/2-\|h^{(j)}\|/2)^{-n-\varepsilon'}$.

Для доказательства компактности мер P_T в пространстве $C\,[0, H]$ нам понадобится такое утверждение.

Лемма 6 [10, 11]. *Меры $\{P_T\}$ компактны в пространстве $C\,[0, H]$, если для $X_T(h)$, $h\in\Pi\,[0, H]$ выполнены условия:*

1) *для всех* $0\leqslant x_i<y_i\leqslant H_i$, $i=\overline{1, n}$, $\mathbf{M}\,|\Delta^{(n)}_{X_T}[y, x]\,|^p\leqslant c_1\left|\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\right|^{1+q}$,

где $p>0$, $q>0$;

2) *найдутся такие* $z_i^{(0)}$, $i=\overline{1, n}$, *что для всех* $0\leqslant x_i<y_i<H_i$

$$\mathbf{M}\,|X_T(z_1^{(0)}, \ldots, z_{i-1}^{(0)}, y_i, z_{i+1}^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})-$$

$$-X_T(z_1^{(0)}, \ldots, z_{i-1}^{(0)}, x_i, z_{i+1}^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})\,|^p\leqslant c_2\,|y_i-x_i|^{1+q},\quad p>0,\ q>0,$$

$$i=\overline{1, n}.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения* А, Б *и* С. *Тогда семейство мер $\{P_T\}$ компактно в пространстве $C\,[0, H]$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\rho_T(h^{(1)}, h^{(2)})=\mathbf{M}X_T(h^{(1)})\,X_T(h^{(2)})=$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}T_i\right)^{-1}\int\limits_{\Pi[0,T]}\int\limits_{\Pi[0,T]}[s_4(t^{(1)}-t^{(2)}, t^{(1)}-t^{(2)}+h^{(1)}, h^{(2)}, 0)+$$

$$+R(t^{(1)}-t^{(2)})\,R(t^{(1)}-t^{(2)}+h^{(1)}-h^{(2)})+$$

$$+R(t^{(1)}-t^{(2)}+h^{(1)})\,R(t^{(1)}-t^{(2)}-h^{(2)})]\,dt^{(1)}dt^{(2)}=$$

$$=\int\limits_{R^{3n}}f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})\,\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})\exp\{i(\langle\lambda^{(2)}, h^{(1)}\rangle+\langle\lambda^{(3)}, h^{(2)}\rangle)\}\times$$

$$\times d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}d\lambda^{(3)}+\int\limits_{R^{2n}}f(\lambda^{(1)})\,f(\lambda^{(2)})\,\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})\,[\exp\{i\langle\lambda^{(2)}, h^{(1)}-h^{(2)}\rangle\}+$$

$$+\exp\{i(\langle\lambda^{(1)}, h^{(1)}\rangle-\langle\lambda^{(2)}, h^{(2)}\rangle)\}]\,d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}, \tag{10}$$

где

$$\Psi_T^{(n)}(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\sin^2(T_j\lambda_j/2)/(T_j(\lambda_j/2)^2).$$

Докажем, что для некоторого $\mu>0$

$$\sup_{T\geqslant T_0>0}\mathbf{M}\,(\Delta^{(n)}_{X_T}[h^{(2)}, h^{(1)}])^2\leqslant c_3\prod_{i=1}^{n}|h_i^{(2)}-h_i^{(1)}|^{1+\mu}. \tag{11}$$

Пусть для булевого вектора $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ и $\Delta=(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)\in R^n$ $\nu\otimes\Delta=(\nu_1\Delta_1, \ldots, \nu_n\Delta_n)$.

Рассмотрим

$$\mathbf{M}\,(\Delta^{(n)}_{X_T}[h+\Delta, h])^2=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\sum_{\nu'_1,\ldots,\nu'_n}(-1)^{|\nu|+|\nu'|}\times$$

$$\times\mathbf{M}X_T(h+\nu\otimes\Delta)\,X_T(h+\nu'\otimes\Delta)=\int\limits_{R^{3n}}f_4(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})\times$$

$$\times \Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})K_1^{(n)}(\lambda^{(2)},\lambda^{(3)},h,\Delta)\,d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}d\lambda^{(3)}+$$

$$+\int_{R^{2n}} f(\lambda^{(1)})f(\lambda^{(2)})\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})K_2^{(n)}(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},h,\Delta)\,d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}, \tag{12}$$

где $K_1^{(n)}=\sum_{\nu}\sum_{\nu'}(-1)^{|\nu|+|\nu'|}\exp\{i(\langle\lambda^{(2)},\ h+\nu\otimes\Delta\rangle+\langle\lambda^{(3)},\ h+\nu'\otimes\Delta\rangle)\}$,
$K_2^{(n)}=\sum_{\nu}\sum_{\nu'}(-1)^{|\nu|+|\nu'|}[\exp\{i\langle\lambda^{(2)},\Delta\otimes(\nu-\nu')\rangle\}+\exp\{i(\langle\lambda^{(1)},h+\nu\otimes\Delta\rangle-$
$-\langle\lambda^{(2)},h+\nu'\otimes\Delta\rangle)\}]$. Докажем, что

$$|K_1^{(n)}|\leqslant c_4\left(\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i^{(2)}\lambda_i^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}\right)\prod_{i=1}^{n}|\Delta_i|^{1+\gamma}, \tag{13}$$

$$|K_2^{(n)}|\leqslant c_5\left(\prod_{i=1}^{n}(|\lambda_i^{(2)}|^{1+\beta}+|\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}|^{(1+\beta)/2})\right)\prod_{i=1}^{n}|\Delta_i|^{1+\beta}. \tag{14}$$

Применим индукцию по n. Докажем справедливость неравенства (13). При $n=1$ имеем (см. [1])

$$K_{1(1)}^{(1)}=e^{i(\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)})h_1}+e^{i(\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)})(h_1+\Delta_1)}-e^{i[\lambda_1^{(2)}h_1+\lambda_1^{(3)}(h_1+\Delta_1)]}-$$
$$-e^{i(\lambda_1^{(3)}h_1+\lambda_1^{(2)}(h_1+\Delta_1))};$$

$$|\operatorname{Re}K_{1(1)}^{(1)}|=4\left|\sin\frac{\lambda_1^{(2)}\Delta_1}{2}\sin\frac{\lambda_1^{(3)}\Delta_1}{2}\cos\frac{(\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)})(2h_1+\Delta_1)}{2}\right|;$$

$$|\operatorname{Im}K_{1(1)}^{(1)}|=4\left|\sin\frac{\lambda_1^{(2)}\Delta_1}{2}\sin\frac{\lambda_1^{(3)}\Delta_1}{2}\sin\frac{(\lambda_1^{(2)}+\lambda_1^{(3)})(2h_1+\Delta_1)}{2}\right|.$$

Тогда

$$|K_{1(1)}^{(1)}|\leqslant c_6|\lambda_1^{(2)}\lambda_1^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}|\Delta_1|^{1+\gamma}. \tag{15}$$

Предположим, что формула (13) верна для $K_1^{(n-1)}$, т. е.

$$|K_1^{(n-1)}|\leqslant c_7\left(\prod_{i=1}^{n-1}|\lambda_i^{(2)}\lambda_i^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}\right)\prod_{i=1}^{n-1}|\Delta_i|^{1+\gamma}. \tag{16}$$

Тогда

$$K_1^{(n)}=\{e^{i(\lambda_n^{(2)}+\lambda_n^{(3)})h_n}+e^{i(\lambda_n^{(2)}+\lambda_n^{(3)})(h_n+\Delta_n)}-$$
$$-e^{i[\lambda_n^{(2)}h_n+\lambda_n^{(3)}(h_n+\Delta_n)]}-e^{i[\lambda_n^{(3)}h_n+\lambda_n^{(2)}(h_n+\Delta_n)]}\}\times$$
$$\times\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}\ \sum_{\nu_1',\ldots,\nu_{n-1}'}(-1)^{\sum_{i=1}^{n-1}(\nu_i+\nu_i')}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n-1}[\lambda_j^{(2)}(h_j+\nu_j\Delta_j)+\right.$$
$$\left.+\lambda_j^{(3)}(h_j-\nu_j'\Delta_j)]\right\}=K_{1(n)}^{(1)}\cdot K_1^{(n-1)}.$$

Подставив здесь вместо $K_{1(n)}^{(1)}$ оценку (15) с заменой $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_1^{(3)}$, Δ_1 на $\lambda_n^{(2)}$, $\lambda_n^{(3)}$, Δ_n соответственно, а вместо $K_1^{(n-1)}$ — оценку из (16), получим формулу (13).

Докажем справедливость неравенства (14). При $n=1$ (см. [1])

$$K_{2(1)}^{(1)}=2-2\cos\lambda_1^{(2)}\Delta_1+\cos(\lambda_1^{(2)}-\lambda_1^{(1)})h_1+\cos(\lambda_1^{(2)}-\lambda_1^{(1)})(h_1+\Delta_1)-$$

$$- \cos(\lambda_1^{(2)}(h_1+\Delta_1) - \lambda_1^{(1)}h_1) - \cos(\lambda_1^{(2)}h_1 - \lambda_1^{(1)}(h_1+\Delta_1)) =$$

$$= 4\left(\sin^2\frac{\lambda_1^{(2)}\Delta_1}{2} + \cos\frac{(\lambda_1^{(1)}-\lambda_1^{(2)})(2h_1+\Delta_1)}{2}\sin\frac{\lambda_1^{(1)}\Delta_1}{2}\sin\frac{\lambda_1^{(2)}\Delta_1}{2}\right).$$

Тогда

$$|K_{2(1)}^{(1)}| \leqslant c_8\left(|\lambda_1^{(2)}|^{1+\beta} + |\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}|^{(1+\beta)/2}\right)|\Delta_1|^{1+\beta}. \tag{17}$$

Предположим, что (14) справедливо для $n-1$, т. е.

$$|K_2^{(n-1)}| \leqslant c_9\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(|\lambda_i^{(2)}|^{1+\beta} + |\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}|^{(1+\beta)/2}\right)\right)\prod_{i=1}^{n-1}|\Delta_i|^{1+\beta}. \tag{18}$$

Тогда аналогично предыдущему

$$K_2^{(n)} = \{2 - 2\cos\lambda_n^{(2)}\Delta_n + \cos(\lambda_n^{(2)}-\lambda_n^{(1)})h_n + \cos(\lambda_n^{(2)}-\lambda_n^{(1)})(h_n+\Delta_n) -$$

$$- \cos(\lambda_n^{(2)}(h_n+\Delta_n) - \lambda_n^{(1)}h_n) - \cos(\lambda_n^{(2)}h_n - \lambda_n^{(1)}(h_n+\Delta_n))\}\times$$

$$\times\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}}\sum_{\nu_1',\ldots,\nu_{n-1}'}(-1)^{\sum_{i=1}^{n-1}(\nu_i+\nu_i')}\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j^{(2)}\Delta_j(\nu_j-\nu_j')\right\} +\right.$$

$$\left.+ \exp\left\{i\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_j^{(1)}(h_j+\nu_j\Delta_j) - \lambda_j^{(2)}(h_j+\nu_j\Delta_j))\right\}\right] = K_{2(n)}^{(1)}K_2^{(n-1)}.$$

Воспользовавшись для оценки $K_{2n}^{(1)}$ формулой (17) с очевидными изменениями, а для оценки $K_2^{(n-1)}$— предположением индукции (18), получим (14).

Подставляя неравенства (13) и (14) в (12), получаем

$$\mathbf{M}(\Delta_{X_T}^{(n)}[h+\Delta, h])^2 \leqslant c_{10}\left[\left\{\int_{R^{3n}}\prod_{j=1}^n|\lambda_j^{(2)}\lambda_j^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}|f_4(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\lambda^{(3)})|\times\right.\right.$$

$$\left.\times\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})\,d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}d\lambda^{(3)}\right\}\prod_{j=1}^n|\Delta_j|^{1+\gamma} +$$

$$+\left\{\int_{R^{2n}}\left(\prod_{i=1}^n\left(|\lambda_i^{(2)}|^{1+\beta} + |\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}|^{(1+\beta)/2}\right)\right)f(\lambda^{(1)})f(\lambda^{(2)})\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}\right\}\times$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^n|\Delta_j|^{1+\beta}\right] \leqslant c_{11}\left[I_T^{(1)}\prod_{j=1}^n|\Delta_j|^{1+\gamma} + I_T^{(2)}\prod_{j=1}^n|\Delta_j|^{1+\beta}\right]. \tag{19}$$

Но

$$I_T^{(1)} = \int_{R^{3n}}\prod_{i=1}^n|\lambda_i^{(2)}\lambda_i^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}|f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})|\,|\Psi_T^{(n)}(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)})|\,d\lambda^{(1)}d\lambda^{(2)}d\lambda^{(3)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{h\in R^n}\int_{R^{2n}}\prod_{i=1}^n|\lambda_i^{(2)}\lambda_i^{(3)}|^{(1+\gamma)/2}|f_4(h-\lambda^{(2)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})|\,d\lambda^{(2)}d\lambda^{(3)}, \tag{20}$$

$$I_T^{(2)} = \left(\prod_{i=1}^n T_i\right)^{-1}\int_{\Pi[0,T]}\int_{\Pi[0,T]}R(x^{(1)}-x^{(2)})\left\{\int_{R^n}f(\lambda^{(2)})\prod_{j=1}^n|\lambda_j^{(2)}|^{1+\beta}e^{i(\lambda^{(2)},x^{(1)}-x^{(2)})} +\right.$$

$$\left.+\left(\int_{R^n}f(\lambda)\prod_{j=1}^n|\lambda_j|^{(1+\beta)/2}e^{i(\lambda,x^{(1)}-x^{(2)})}d\lambda\right)^2\right\}dx^{(1)}dx^{(2)}\xrightarrow[T\to\infty]{}$$

$$\underset{\tilde{T}\to\infty}{\to} \int_{R^n} R(x) \int_{R^n} f(\lambda) \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{1+\beta} e^{i(\lambda,x)} dx d\lambda +$$

$$+ \int_{R^n \setminus R^n} \left(\int_{R^n} f(\lambda) \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{(1+\beta)/2} e^{i(\lambda,x)} d\lambda \right)^2 dx = 2 \int_{R^n} f^2(\lambda) \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{1+\beta} d\lambda \leqslant c_{12} I_1 < \infty. \tag{21}$$

Подставив соотношения (20) и (21) в (19) и выбрав $\mu = \min\{\gamma, \beta\}$, получим справедливость (11), откуда и следует выполнение условия 1) леммы 6. Проверить условие 2) более просто. Фактически надо воспользоваться формулами типа (15) и (17). Лемма 7 доказана.

Справедливость теоремы 1 очевидным образом вытекает из лемм 5 и 7 (см., например, [10, 11, 14]).

3. Частные случаи и замечания.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если вместо (3) и (4) потребовать, чтобы

$$\overline{\lim_{\tilde{T}\to\infty}} \int_{R^{5n}} \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(2)}|^{(1+\gamma)/2} |f_4(\lambda^{(1)} + u^{(1)}, u^{(2)} - \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} + u^{(3)}) -$$

$$- f_4(\lambda^{(1)}, -\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})| |\Psi_T^{(4n)}(u)| d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)} \prod_{j=1}^{3} du^{(j)} < \infty \tag{22}$$

для некоторого $\gamma > 0$, где $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)})$, $u^{(4)} = -u^{(1)} - u^{(2)} - u^{(3)}$ и

$$\Psi_T^{(4n)}(u) = (2\pi)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} T_i \right)^{-1} \prod_{j=1}^{4} \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{T_k u_k^{(j)}}{2} / (u_k^{(j)}/2).$$

Действительно, используя n-мерный аналог леммы 3.3 [4] и оценки (13) и (14) из доказательства теоремы 1, получаем соотношения компактности без предположений (3) и (4).

Замечание 2. Условие (22) выполнено, если, например, предположить, что функция

$$G(u) = \int_{R^{2n}} \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(1)} \lambda_i^{(2)}|^{(1+\gamma)/2} |f_4(\lambda^{(1)} + u^{(1)}, u^{(2)} - \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} + u^{(3)})| d\lambda^{(1)} d\lambda^{(2)}$$

непрерывна по $u' = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ в некоторой окрестности нуля и для некоторого $v > 0$

$$\lim_{\tilde{T}\to\infty} \int_V |\Psi_T^{(4n)}(u)| du' = 0, \quad V = R^{3n} \setminus \{ \|u^{(j)}\| < v, \ j = \overline{1, 3} \}.$$

Для гауссовского случая из теоремы 1 следует такая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены предположения A, $Б$ и $В$, то меры P_T при $\tilde{T} \to \infty$ слабо сходятся в пространстве C [0, H] к мере P, порожденной гауссовским случайным полем $X(h)$, $h \in \Pi$ [0, H] с $MX(h) = 0$ и корреляционной функцией*

$$\rho(h^{(1)}, h^{(2)}) = (2\pi)^n \int_{R^n} (\exp\{i\langle\lambda, h^{(1)} - h^{(2)}\rangle\} + \exp\{i\langle\lambda, h^{(1)} + h^{(2)}\rangle\}) f^2(\lambda) d\lambda.$$

Замечание 3. Как уже отмечалось, случай $n = 1$ разобран авторами в [1]. Однако условия теоремы 1 при $n = 1$ ослабляют ряд условий теоремы 1 работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В., Леоненко Н. Н. О сходимости распределений функционалов от оценки корреляционной функции.— Литов. мат. сборник, 1978, **16**, № 4, с. 35—44.
2. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М.: Мир, 1974.— 569 с.
3. Бенткус Р. Ю., Журбенко И. Г. Асимптотическая нормальность спектральных оценок.— ДАН СССР, 1976, **229**, № 1, с. 11—15.
4. Бенткус Р. Ю. О семиинвариантах оценок спектра стационарной последовательности.— Литов. мат. сборник, 1976, **16**, № 4, с. 31—61.
5. Леоненко М. М. Центральна гранична теорема для однорідних випадкових полів і асимптотична нормальність оцінок коефіцієнтів регресії.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 8, с. 699—702.
6. Булинский А. В., Журбенко И. Г. Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, № 4, с. 707—717.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.— 283 с.
8. Бенткус Р., Руткаускас Р. Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка.— Литов. мат. сборник, 1973, **13**, № 1, с. 29—45.
9. Бенткус Р., Рудскис Р., Сушинскас Ю. О среднем оценок спектра однородного случайного поля.— Литов. мат. сборник, 1974, **14**, № 3, с. 67—72.
10. Ченцов Н. Н. Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций. —В кн.: Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Ереван: Изд-во Арм ССР, 1960, с. 280—284.
11. Ченцов Н. Н. Обоснование статистических критериев методами теории случайных процессов. Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук.— М., 1956.— 6 с.
12. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.— М.: Физматгиз, 1963.— 284 с.
13. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 351 с.
14. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 2, с. 117—238.

Институт кибернетики АН УССР
Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
22.IX 1978 г.