УДК 519.21

И. К. Мацак

Асимптотические свойства гауссовских процессов

1. Введение. Для стационарных гауссовских процессов хорошо известно, что поток выходов за высокий уровень приближается к пуассоновскому при определенных условиях, налагаемых на корреляционную функцию. Этот вопрос исследовался в работах [1—5]. В настоящей работе подобные результаты получены для некоторых классов нестационарных гауссовских процессов. Изучается предельное поведение максимума дифференцируемого в среднем квадратическом гауссовского процесса.

Предположение, что асимптотические свойства локально-стационарных и стационарных гауссовских процессов эквивалентны, было высказано ранее Берманом [6].

2. Асимптотическая пуассоновость потока выходов за высокий уровень. Рассмотрим непрерывный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, с корреляционной функцией $r(t, s)$. Положим

$$\sigma^2(t) = r(t,t), \quad \rho(t,s) = \frac{r(t,s)}{\sigma(t)\,\sigma(s)}, \quad \gamma^2(t) = r_{11}(t,t) = \left[\frac{\partial^2 r(t,s)}{\partial t \partial s}\right]_{t=s},$$

$$\mu(t) = \frac{r_{01}(t,t)}{\gamma(t)\,\sigma(t)} = \frac{\left[\dfrac{\partial r(t,s)}{\partial s}\right]_{t=s}}{\gamma(t)\,\sigma(t)}, \quad \rho_{11}(t,s) = \left[\frac{\partial^2 \rho(t,s)}{\partial t \partial s}\right].$$

Эти обозначения соответствуют обозначениям книги [2, гл. 13]. Будем говорить, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию (1), если $r(t, s)$ имеет непрерывную смешанную частную производную второго порядка $r_{11}(t, s)$, совместное нормальное распределение $\xi(t)$ и его производной в среднем квадратическом $\xi'(t)$ не вырождено при каждом $t \geqslant 0$ и

а) $\sigma(t) > 0$; $|\mu(t)| < 1$; б) $M\xi(t) = 0$; в) $\sup\limits_{t \geqslant 0} \rho(t, t+s) < 1$, $s > 0$;

$$\text{г)} \quad \sup_{|t-s| \leqslant h} \left| 1 - \frac{\rho_{11}(t,s)}{[\rho_{11}(t,t)\,\rho_{11}(s,s)]^{1/2}} \right| \underset{h\to 0}{\to} 0; \tag{1}$$

$$\text{д)} \quad \Psi(t) = \int_0^t \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} [1 - \mu^2(s)]^{1/2}\, ds \underset{t\to\infty}{\to} \infty.$$

Если $\xi(t)$ — непериодический стационарный гауссовский процесс со спектральной функцией $F(\lambda)$ и $\int \lambda^2 dF(\lambda) < \infty$, то условие (1) выполнено.

Пусть $u_t(s) = \sigma(s)\,[2\log(\Psi(t)/2\pi\lambda)]^{1/2}$, ($\log \sim \ln$), $N(t)$ — число выходов процесса $\xi(s)$ за криволинейный уровень $u_t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

Теорема 1. *Если гауссовский случайный процесс удовлетворяет условию* (1) *и*

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{t \geqslant 0} \rho(t, t+s) \log \Psi(s) = 0, \tag{2}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P\{N(t)=k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Положим

$$u = [2\log(t\gamma/2\pi\lambda)]^{1/2}, \quad r(s) = \sup_{t\geqslant 0} r(t, t+s). \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t)$ *—гауссовский процесс,* $M\xi(t)=0$, *и корреляционная функция* $r(t, s)$ *удовлетворяет условиям*

$$r(t,s) = 1 - \frac{\gamma^2}{2}|t-s|^2 + o(|t-s|^2), \quad |t-s|\to 0, \tag{4}$$

$$r(s) < 1, \quad s > 0, \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty} r(s)\log s = 0. \tag{6}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} P\{N(t)=k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Впервые подобный результат для стационарных процессов при чуть более жестких условиях получил Ю. К. Беляев [3]. Наше доказательство опирается на работу [5].

Замечание. В работе [7] в формулировках теоремы и леммы допущены неточности (см. теорему 2 и лемму 2 настоящей работы).

3. Предельное поведение максимума. Приведем некоторые результаты о предельном поведении максимума дифференцируемого в среднем квадратическом гауссовского процесса.

Теорема 3. *Если гауссовский процесс удовлетворяет условиям* (1), (2), *то*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\sup_{0<s<t}\frac{\xi(s)}{\sigma(s)} \leqslant [2\log\Psi(t)]^{1/2} + \frac{\log 1/2\pi + x}{[2\log\Psi(t)]^{1/2}}\right\} = e^{-e^{-x}}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\xi(t)$ *— гауссовский процесс, удовлетворяющий условию* (1), *тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\left\{\sup\limits_{0<s<t}\frac{\xi(s)}{\sigma(s)} > x\right\}}{(1/2\pi)\,\Psi(t)\,e^{-x^2/2}} = 1.$$

Пусть M_a^+ — множество положительных неубывающих функций на $[a, +\infty)$, $a \geqslant 0$.

Теорема 5. *Если гауссовский случайный процесс* $\xi(t)$ *удовлетворяет условию* (1), $\varphi(t)\in M_a^+$ и $\int\limits_a^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2(t)\right]dt < \infty$, *то* $P\{\exists t_0 : \xi(t) \leqslant \sigma(t)\times$ $\times\,\varphi(\Psi(t)),\ t\geqslant t_0\} = 1$.

Теорема 6. *Если гауссовский процесс* $\xi(t)$ *удовлетворяет условию* (1), $\varphi(t)\in M_a^+$ *и для некоторого* $a>0$

$$\int\limits_a^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2(t)\right]dt = \infty, \quad \sup_{t\geqslant 0}\rho(t, t+s) = O(\Psi(s)^{-\nu}), \quad \underset{\nu>0}{s\to\infty},$$

то $P\{\xi(t) > \sigma(t)\,\varphi(\Psi(t))$, *бесконечное число раз*$\} = 1$.

Замечание. Теорема 5 остается справедливой, даже если не выполняются пп. в), г) условия (1).

4. З а м е н а в р е м е н и в с л у ч а й н о м п р о ц е с с е. Все обозначения настоящего пункта соответствуют введенным в п. 2.

Л е м м а 1. *Пусть* $r(t, s)$ *— корреляционная функция, удовлетворяющая условию* (1), $\Psi_{-1}(t)$ *— непрерывная монотонно неубывающая функция, обратная к* $\Psi(t)$, *т. е.* $\Psi(\Psi_{-1}(t)) = t$. *Тогда*

$$\bar{\rho}(t, s) = \frac{r(\Psi_{-1}(t), \Psi_{-1}(s))}{\sigma(\Psi_{-1}(t))\,\sigma(\Psi_{-1}(s))}$$

— корреляционная функция, удовлетворяющая условию (4) *с* $\gamma = 1$. *Если* $\eta(t)$ *— непрерывный гауссовский процесс с корреляционной функцией* $\bar{\rho}(t, s)$, *то для любого* u $MN_\eta(t) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-u^2/2} t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $r(t, s)$, $M\xi(t) = 0$. Положим $\eta(t) = \dfrac{\xi(\Psi_{-1}(t))}{\sigma(\Psi_{-1}(t))}$, $t \geqslant 0$. Ясно, что $\eta(t)$ — гауссовский процесс и его корреляционная функция равна $\bar{\rho}(t, s)$. Пусть $\zeta(t) = \dfrac{\xi(t)}{\sigma(t)}$. Известно [2, гл. 13. 5], что если $N_\zeta(t)$ — число выходов процесса $\zeta(s)$ за уровень u, $0 \leqslant s \leqslant t$, то $MN_\zeta(t) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \Psi(t)$. Так как $\eta(t) = \zeta(\Psi_{-1}(t))$, то $MN_\eta(t) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} t$. Функции $\Psi(s)$, $\Psi_{-1}(s)$ непрерывно дифференцируемы, поэтому и $\bar{\rho}(t, s)$ имеет непрерывную смешанную производную $\bar{\rho}_{11}(t, s)$. Из определения следует, что $\bar{\rho}(t, s) = \rho(\Psi_{-1}(t), \Psi_{-1}(s))$, $\bar{\rho}(t, t) = 1$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$\begin{aligned} 2(1 - \rho(t, t+h) &= \rho(t+h, t+h) - \rho(t+h, t) - \rho(t, t+h) + \rho(t, t) = \\ &= \rho_{11}(t + \theta_1 h, t + \theta_{2h})\, h^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$. Далее, из (7) получаем, что $\mu_\rho(t) = \left[\dfrac{\partial\rho(t, s)}{\partial s}\right]_{t=s} = 0$. Отсюда

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = [\rho_{11}(t, t)]^{1/2}, \quad \frac{d\Psi_{-1}(t)}{dt} = [\rho_{11}(\Psi_{-1}(t), \Psi_{-1}(t))]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{\rho}_{11}(t, s) = \frac{\partial^2 \bar{\rho}(t, s)}{\partial t \partial s} = \frac{\rho_{11}(\Psi_{-1}(t), \Psi_{-1}(s))}{[\rho_{11}(\Psi_{-1}(t), \Psi_{-1}(t))\,\rho_{11}(\Psi_{-1}(s), \Psi_{-1}(s))]^{1/2}},$$

$$\bar{\rho}_{11}(t, t) = 1.$$

Если в равенстве (7) заменить $\rho(t, s)$ на $\bar{\rho}(t, s)$ и применить п. г) условия (1), то получим утверждение леммы.

5. В с п о м о г а т е л ь н а я л е м м а.

Л е м м а 2. *Пусть в схеме серий случайная величина* ξ *представлена в виде* $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$,

$$P\{\xi_i = 1\} \sim \frac{\lambda}{n}, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Для любых фиксированных $m \geqslant 1$ *и множества* $A \subset \{1, 2, \ldots, m\}$

$$P\{\xi_k = 0,\ k \in A_i,\ i \in A\} - \prod_{i \in A} P_i \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{9}$$

где

$$P_i = \prod_{k \in A_i} P(\xi_k = 0), \quad A_i = \left\{k : \frac{(i-1)n}{m} < k \leqslant \frac{in}{m}\right\},$$

ξ_k *принимают лишь значения* 1 *и* 0. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} P\{\xi = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ — произвольное множество, $B \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $\xi'_i = \max(\xi_k : k \in A_i)$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| P\{\xi'_i = 0, i \in B\} - \prod_{i \in B} P\{\xi'_i = 0\} \right| \leqslant \left| P\{\xi'_i = 0, i \in B\} - \prod_{k=1}^{l} P_{i_k} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \left[| P\{\xi'_{i_k} = 0\} - P_{i_k} | \prod_{j=1}^{k-1} P\{\xi'_{i_j} = 0\} \prod_{j=k+1}^{l} P_{i_j} \right].$$

Отсюда и условия (9) имеем

$$\left| P\{\xi'_i = 0, \ i = \overline{1, m}\} - P\{\xi'_i = 0, \ i \in B\} \prod_{i \bar{\in} B} P\{\xi'_i = 0\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i \bar{\in} B} P\{\xi'_i = 0\} \left| P\{\xi'_i = 0, \ i \in B\} - \prod_{i \in B} P\{\xi'_i = 0\} \right| +$$

$$+ \left| P\{\xi'_i = 0, \ i = \overline{1, m}\} - \prod_{i=1}^{m} P\{\xi'_i = 0\} \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому (см. доказательство леммы 8.1 [5]) и для любых $x_i \in \{0, 1\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \left| P\{\xi'_i = x_i, \ i = \overline{1, m}\} - \prod\limits_{i=1}^{m} P\{\xi'_i = x_i\} \right| = 0$, т. е. величины ξ'_i асимптотически независимы. Применяя условие (8), получаем равенство

$$\lim_{n \to \infty} P\{\xi'_i = 0\} = \lim_{n \to \infty} P_i = \lim_{n \to \infty} \left| 1 - \frac{\lambda}{n} \right|^{\frac{n}{m}} = e^{-\frac{\lambda}{m}}. \tag{10}$$

Так как величины ξ'_i асимптотически независимы, то

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m} \xi'_i = k\right\} = C_m^k (1 - e^{-\frac{\lambda}{m}})^k e^{-\frac{\lambda(m-k)}{m}}. \tag{11}$$

С другой стороны, учитывая (8), (10), имеем

$$M\left|\xi - \sum_{i=1}^{m} \xi'_i\right| = M\xi - \sum_{i=1}^{m} M\xi'_i \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda - m(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}),$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| P\{\xi = k\} - P\left\{\sum_{i=1}^{m} \xi'_i = k\right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| P\left\{\xi = k, \ \sum_{i=1}^{m} \xi'_i \neq k\right\} - P\left\{\xi \neq k, \ \sum_{i=1}^{m} \xi'_i = k\right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} P\left\{\left|\xi - \sum_{i=1}^{m} \xi'_i\right| > 0\right\} \leqslant \lambda - m(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим утверждение леммы, ибо из (11) следует

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m} \xi_i' = k\right\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

6. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 1 для справедливости теоремы 1 нам достаточно доказать теорему 2 при $\gamma = 1$.

Пусть $N'(t)$ — число выходов за уровень u процесса $\xi_n(t)$, совпадающего с $\xi(t)$ в точках $\{jt/n\}$, $j = \overline{0, n}$, и линейно меняющегося в интервалах между этими точками. Процесс $\xi(t)$ непрерывен и поэтому при фиксированном t $P\{N'(t) \underset{n\to\infty}{\to} N(t)\} = 1$ [2, с. 203].

Лемма 3. *Пусть $g(t)$ — положительная функция, $t \geqslant 0$,*

$$n \text{ — целая часть } (tu(t)\, g(t)), \quad g(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty, \tag{12}$$

$u(t)$ определена равенством (3). *Тогда* $\lim\limits_{t\to\infty} M\,|N(t) - N'(t)| = 0.$

Заметим, что во всех леммах настоящего пункта предполагаем, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 при $\gamma = 1$.

Доказательство. Из определения $N'(t)$ имеем

$$MN'(t) = \sum_{j=1}^{n} P\left\{\xi\left(\frac{(j-1)\,t}{n}\right) \leqslant u < \xi\left(\frac{jt}{n}\right)\right\}.$$

Нам потребуются следующие равенства (см. [2, с. 34]). Если $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$, $M\xi_1^2 = M\xi_2^2 = 1$, $M\xi_1\xi_2 = \rho$, ξ_1, ξ_2 — гауссовские случайные величины, то

$$P\{\xi_1 \leqslant a, \xi_2 \leqslant a\} = \Phi^2(a) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho} e^{-\frac{a^2}{1+z}} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Если $\xi_1 = \xi_2$, т. е. $\rho = 1$, то

$$\Phi(a) = \Phi^2(a) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{-\frac{a^2}{1+z}} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Поэтому

$$P\left\{\xi\left(\frac{(j-1)\,t}{n}\right) \leqslant u < \xi\left(\frac{jt}{n}\right)\right\} = P\left\{\xi\left(\frac{(j-1)\,t}{n}\right) \leqslant u\right\} -$$

$$- P\left\{\xi\left(\frac{(j-1)\,t}{n}\right) \leqslant u,\ \xi\left(\frac{jt}{n}\right) \leqslant u\right\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r\left(\frac{(j-1)t}{n},\, \frac{jt}{n}\right)}^{1} e^{-\frac{u^2}{1+z}} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \int\limits_{r\left(\frac{(j-1)t}{n},\, \frac{jt}{n}\right)}^{1} e^{-\frac{u^2(1-z)}{2(1+z)}} (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Последнее выражение при $t \to \infty$ асимптотически эквивалентно $\frac{\lambda}{n}$ равномерно по j. Действительно, при $t \to \infty$ из (4), (12) имеем $r\left(\frac{(j-1)t}{n}, \frac{jt}{n}\right) \sim 1 - \frac{1}{2}[u(t)g(t)]^{-2}$ равномерно по j и $u^2(1-z) \to 0$, $(1-z^2) \sim \sim 2(1-z)$, $z \to 1$. Поэтому

$$\int\limits_{r\left(\frac{(j-1)t}{n}, \frac{jt}{n}\right)}^{1} e^{-\frac{u^2(1-z)}{2(1+z)}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \sim \frac{1}{u(t)g(t)}, \text{ а } \frac{1}{2\pi}\exp[-u^2/2] \sim \frac{\lambda}{t}.$$

Таким образом, $MN'(t) \to \lambda$, $t \to \infty$. Утверждение леммы 3 следует из известного результата Райса о среднем числе пересечений уровня гауссовским процессом (см. лемму 1) и неравенства $N'(t) \leqslant N(t)$.

Пусть $Q_t = \left\{\frac{jt}{n}, j = \overline{0, n}\right\}$, n определено соотношением (12), $\varepsilon > 0$, m — положительное целое (m может зависеть от t). $I_1, \ldots, I_m$ — замкнутые отрезки из $[0, t]$ такие, что если $i < k$ и $x \in I_i$, $y \in I_k$, то $x < y$, если $i \neq k$, $x \in I_i$, $y \in I_k$, $|x - y| \geqslant \varepsilon$.

Положим $U_i = \max(\xi(s) : s \in I_i \cap Q_t)$. Наложим на функцию $g(t)$ в (12) следующие ограничения:

$$\lim_{t\to\infty} g(t)\, t^{-p} = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log g(t)}{\log t} = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t\to\infty} g^2(t) \sup_{s \geqslant t^{\beta/2}} (r(s)\log s) = 0, \tag{15}$$

где $p > 0$, $\beta > 0$, $r(s)$ определено в (3).

Лемма 4. *Если $g(t)$ удовлетворяет условиям* (13) — (15), *то для u, определенного в* (3):

$$\lim_{t\to\infty} \left| P\left\{\bigcap_{i=1}^{m} (U_i < u)\right\} - \prod_{i=1}^{m} P\{U_i < u\} \right| = 0.$$

Из условий (5), (6) следует, что $\sup(|r(t,s)| : |t-s| > \varepsilon) < \delta$ для некоторого δ, $0 < \delta < 1$, ε задано при определении I_k. Действительно, если $r(t_k, t_k + s_k) \to 1$, $s_k \to s > 0$, то $r(t_k, t_k + s) \to 1$, что противоречит (5). Если $s_k \to \infty$, то приходим к противоречию с (6). Дальнейшее доказательство леммы 4 по существу ничем не отличается от доказательства Бермана (см. [5, лемма 5.1]), и поэтому опускаем его.

Пусть $I_i = [(i-1)\tau, (i-\beta)\tau]$, $0 < \tau < 1$, $0 < \beta < 1$, $i = \overline{1, m_t}$, $m_t = \left[\frac{t}{\tau}\right]$. Обозначим через N_i число выходов за уровень u процесса $\xi(s)$, N_i' — число выходов за уровень u процесса $\xi_n(s)$, определенного в лемме 3, $s \in I_i$: $\eta_i = \inf(\xi(s) : s \in I_i \cap Q_t)$,

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \max(\xi(s) : s \in I_i) > u, \\ 0, & \max(\xi(s) : s \in I_i) \leqslant u, \end{cases} \quad \xi_i' = \begin{cases} 1, & \max(\xi(s) : s \in I_i \cap Q_t) > u, \\ 0, & \max(\xi(s) : s \in I_i \cap Q_t) \leqslant u. \end{cases}$$

Лемма 5. *В условиях теоремы* 2

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\left|\sum_{i=1}^{m_t} N_i - \sum_{i=1}^{m_t} \xi_i'\right| > 0\right\} = 0. \tag{16}$$

Доказательство. В силу леммы 3

$$M \sum_{i=1}^{m_t} N_i' \to \lambda(1-\beta), \quad M \sum_{i=1}^{m_t} (N_i - N_i') \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{17}$$

Отсюда

$$M \sum_{i=1}^{m_t} (\xi_i - \xi_i') \leqslant M \sum_{i=1}^{m_t} (N_i - N_i') \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{18}$$

Из результатов [6] следует, что при достаточно больших t $P\{\xi_i = 1\} \sim \sim \frac{\tau(1-\beta)}{2\pi} e^{-u^2/2}$ равномерно по i. Поэтому $M \sum\limits_{i=1}^{m_t} \xi_i \to \lambda(1-\beta)$, а из (18) имеем

$$M \sum_{i=1}^{m_t} \xi_i' \to \lambda(1-\beta). \tag{19}$$

Для доказательства (16) в силу (17), (18) нам достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\left|\sum_{i=1}^{m_t} (N_i' - \xi_i')\right| > 0\right\} = 0.$$

Но

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{m_t} (N_i' - \xi_i')\right| > 0\right\} \leqslant \sum_{i=1}^{m_t} [P\{N_i' \geqslant 2\} + P\{\eta_i \geqslant u\}] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m_t} [MN_i' - P\{N_i' \geqslant 1\} + P\{\eta_i \geqslant u\}] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m_t} [MN_i' - P\{\xi_i' = 1\} + 2P\{\eta_i \geqslant u\}]. \tag{20}$$

Так как $1 - \Phi(u) \sim O(1/tu(t))$, то из (17), (19) следует, что величина (20) стремится к 0 при $t \to \infty$. Доказательство леммы 5 закончено.

Теперь можем приступить к доказательству теоремы 2. Из лемм 2 и 4 следует, что

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m_t} \xi_i' = k\right\} = e^{-\lambda(1-\beta)} \frac{[\lambda(1-\beta)]^k}{k!}, \tag{21}$$

если $g(t)$, Q_t удовлетворяют условиям леммы 4. Применение леммы 5 к (21) дает

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{m_t} N_i = k\right\} = e^{-\lambda(1-\beta)} \frac{[\lambda(1-\beta)]^k}{k!}.$$

Так как $P\left\{\left|N(t) - \sum\limits_{i=1}^{m_t} N_i\right| > 0\right\} \leqslant \beta\lambda$, то

$$\left|P\{N(t) = k\} - P\left\{\sum_{i=1}^{m_t} N_i = k\right\}\right| \leqslant P\left\{\left|N(t) - \sum_{i=1}^{m_t} N_i\right| > 0\right\} \leqslant \beta\lambda.$$

Поэтому

$$-\beta\lambda + e^{-\lambda(1-\beta)} \frac{[\lambda(1-\beta)]^k}{k!} \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty} P\{N(t)=k\} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}_{t\to\infty} P\{N(t)=k\} \leqslant \beta\lambda + e^{-\lambda(1-\beta)} \frac{[\lambda(1-\beta)]^k}{k!}.$$

Но если $0<\beta<1$ произвольно, то $\lim\limits_{t\to\infty} P\{N(t)=k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Теоремы 3—6 являются следствиями теоремы 1, леммы 1 и результатов работ [6, 8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Волконский В. А., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, **6**, № 2, с. 202—215.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы.— М., Мир, 1969.— 394 с.
3. Беляев Ю. К. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом.— Теория вероятн. и ее примен., 1967, **12**, № 3, с. 444—457.
4. Pickands J., III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes.— Trans. Amer. Math. Soc. 1969, **145**, № 1, p. 51—75.
5. Berman S. M. Asymptotic independence of the number of high and low level crossings of stationary Gaussian processes.— Ann. Math. Statist. 1971, **42**, № 3, p. 927—945.
6. Berman S. M. Sojourns and extermes of Gaussian processes.— Ann. Probab., 1974, **2**, № 6, p. 999—1026.
7. Мацак И. К. Предельная теорема для потока выходов за высокий уровень гауссовского процесса.— Тезисы докладов Второй Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Т. 1. Вильнюс, 1977, с. 23—24.
8. Qualls C., Watanabe H. Asymptotic property of Gaussian processes.— Ann. Math. Statist. 1972, **43**, N 2, p. 580—596.
9. Watanabe H. An asymptotic property of Gaussian processes.— Trans. Amer. Math. Soc. 1970, **148**, N 1, p. 233—248.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.X 1978 г.