УДК 519.217

Р. В. Бойко, И. М. Лейчкис

Вероятностная модель работы непрерывного фильтра

В настоящей заметке рассматривается математическая модель, описывающая процесс фильтрования частиц. Моделируется следующий физический процесс: на фильтр поступает случайный поток частиц, каждая из появившихся частиц может быть удержана фильтром на некоторой глубине x, удержанная фильтром частица через некоторое время может сорваться и задержаться на глубине y, $y > x$ и так далее.

Предлагается следующая вероятностная модель этого процесса. На фильтр поступает пуассоновский поток частиц $\nu(t)$ с параметром λ. Каждая из появившихся частиц улавливается фильтром на глубине x с вероятностью $f(x)\,dx$, $f(x)$ — плотность распределения некоторой неотрицательной случайной величины ξ.

Каждая из уловленных и удержанных до момента времени t частиц независимо от других частиц за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ срывается с вероятностью $a\Delta t + o(\Delta t)$ и продолжает оставаться на месте с вероятностью $1 - a\Delta t + o(\Delta t)$.

Сорвавшаяся с уровня x частица совершает мгновенный скачок на глубину $x + y$ с вероятностью $g(y)\,dy$, $g(x)$ — плотность распределения некоторой неотрицательной случайной величины η.

Обозначим через $\xi_d(t)$ число частиц в момент времени t в фильтре длины d, t — время, прошедшее с момента включения потока частиц; предполагается, что $\xi_d(0) = 0$. Наша задача — найти распределение случайной величины $\xi_d(t)$ по заданным выше параметрам потока и фильтра.

Введем производящую функцию $F(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\, z^k$, где $P_k(t) = P\{\xi_d(t) = k\}$ — вероятность того, что в момент времени t в фильтре длины d находится k частиц.

Пусть $X_i(t, t_i)$ — положение частицы в момент времени t, поступившей на фильтр в случайный момент времени t_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu(t)$. Тогда

$$\xi_d(t) = \sum_{i=1}^{\nu(t)} I_d(X_i(t, t_i)), \qquad (1)$$

где $I_d(X_i(t, t_i))$ —индикатор события $\{X_i(t, t_i) \in [0, d]\}$. Следовательно,

$$F(t, z) = Mz^{\xi_d(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} M[z^{\xi_d(t)} \mid \nu(t) = k]\, P\{\nu(t) = k\}. \qquad (2)$$

Известно (см., например, [1, гл. 7, § 2]), что совместное распределение на $[0, t]$ моментов поступления t_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu(t)$, при условии, что $\nu(t) = k$, совпадает с распределением порядковых статистик k независимых равномерно распределенных на $[0, t]$ случайных величин, поэтому

$$M[z^{\xi_d(t)} \mid \nu(t) = k] = \frac{1}{t^k} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \ldots \int_0^t dt_k M\, [z^{\sum_{i=1}^{k} I_d(X_i(t, t_i))}]. \qquad (3$$

Так как частицы движутся независимо друг от друга, то

$$M\left[z^{\sum_{i=1}^{k} I_d(X_i(t,t_i))}\right] = \prod_{i=1}^{k} M z^{I_d(X_i(t,t_i))}.$$

Заметим, что после первой задержки частицы в точке x, $x \leqslant d$, дальнейшее движение частицы, согласно вышеизложенной модели, описывается сложным пуассоновским процессом $\eta_x(t)$, начинающимся из точки x с плотностью распределения величины скачка $g(x)$ и параметром распределения времени сидения a.

Далее, так как появившаяся частица в момент t_i может задержаться на глубине x, $x \leqslant d$, и за оставшееся время $t - t_i$ может остаться в слое d или выскочить из слоя, а также сразу проскочить слой фильтра d, то

$$H(z, t - t_i) = M z^{I_d(X_i(t,t_i))} = \int_0^d f(x)\,(1 - P\{\eta_0(t - t_i) < d - x\}\,dx +$$

$$+ 1 - \int_0^d f(x)\,dx + z\int_0^d f(x)\,P\{\eta_0(t - t_i) < d - x\}\,dx. \qquad (4)$$

Следовательно,

$$M\left[z^{\xi_d(t)} \mid \nu(t) = k\right] = \left(\frac{1}{t}\int_0^t H(z, t - \tau)\,d\tau\right)^k. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$F(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t H(z, t - \tau)\,d\tau\right\}^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$= \exp\left\{\lambda\int_0^t (H(z, \tau) - 1)\,d\tau\right\}. \qquad (6)$$

Следует отметить, что в процессе доказательства формулы (6) нигде не использовалась специфика процесса $\eta_x(t)$, описывающего движение частицы в фильтре.

Поэтому формула (6) имеет место, в частности, и в том случае, когда движение частицы будет описываться полумарковским процессом или некоторым другим процессом, адекватным реальной физической модели.

Учитывая (4), формулу (6) можно записать в виде

$$F(t, z) = \exp\{-\lambda h(t, d) + z\lambda h(t, d)\}, \qquad (7)$$

где (см. [2, гл. VI, §4])

$$h(t, d) = \int_0^t\int_0^d f(x)\,P\{\eta_0(\tau) < d - x\}\,dx\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^d f(x)\,e^{-a\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^k}{k!}\,G^{*k}(d - x)\,dx\,d\tau, \qquad (8)$$

$G^{*k}(x)$ — k-я свертка функции распределения $G(x) = \int_0^x g(u)\,du$.

Дифференцируя (7) по z k раз, получаем выражение для k-го факториального момента случайной величины $\xi_d(t)$:

$$M_k(t, d) = M(\xi_d(t) - 1) \ldots (\xi_d(t) - k + 1) = \lambda^k h^k(t, d). \tag{9}$$

Так как ряд в (8) сходится равномерно, то

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^d f(x)\, e^{-a\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a\tau)^k}{k!} G^{*k}(d - x)\, dx d\tau =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^d f(x) \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(d - x)\, dx. \tag{10}$$

Поэтому существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$ и производящая функция p_k, $k = 0, 1 \ldots$, имеет вид

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \exp\left\{-\frac{\lambda}{a}\pi(d) + \frac{z\lambda}{a}\pi(d)\right\}, \tag{11}$$

где $\pi(d) = \int\limits_0^d f(x) \sum\limits_{k=0}^{\infty} G^{*k}(d - x)\, dx$. В частности, положив $f(x) = g(x) = ce^{-cx}$, получим, что

$$\pi(d) = \int_0^d f(x) \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(d - x)\, dx = cd \text{ и } S(z) = \exp\left\{-\frac{\lambda c}{a} d + z\frac{\lambda c}{a} d\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлин С. Основы теории случайных процессов.— М.: Мир, 1971.— 536 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2.— М.: Мир, 1967.— 752 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
29.XII 1978 г.