УДК 519.21

Д. В. Гусак

О пересечении уровня однородным процессом с независимыми приращениями и невырожденной винеровской компонентой

При изучении случайных блужданий, описываемых суммами случайных величин и процессами с независимыми приращениями, возникает вопрос о распределении таких граничных функционалов, связанных с пересечением уровня, как момент первого пересечения, величина первого перескока, недоскока и полного скачка, пересекающего данный уровень. Распределения таких функционалов изучались в [1, § 1.4] для однородных процессов с независимыми приращениями, управляемых конечной цепью Маркова. Здесь соответствующие результаты из [1] усиливаются на тот случай, когда изучаемый процесс $\xi(t)$ содержит невырожденную винеровскую компоненту: $\sigma W(t)$, $\sigma^2 > 0$. Для простоты ограничимся обычным процессом с независимыми приращениями, не затрагивая случая управляемых марковской цепью процессов.

Пусть $\{\xi(t),\ t \geqslant 0,\ \xi(0) = 0\}$ — однородный процесс с независимыми приращениями, задаваемый кумулянтной функцией

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} [e^{i\alpha x} - 1]\, d\Pi(x). \tag{1}$$

Рассмотрим функционалы, связанные с пересечением уровня $x > 0$:

$$\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : \xi(t) \geqslant x\},\ \ \gamma^+(x) = \xi^+(\tau_x^+ + 0) - x,$$
$$\gamma_+(x) = x - \xi(\tau_x^+ - 0), \quad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x). \tag{2}$$

Для формулировки утверждения, усиление которого установим ниже, введем обозначения

$$[Me^{i\alpha\xi}]_+^0 = M[e^{i\alpha\xi}, \xi \geqslant 0], \quad a^+ = \max(0, a), \quad \xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u),$$
$$\xi^-(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u),$$
$$\varphi_\pm(s, \alpha) = Me^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)}, \quad \mathcal{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}\ (s, t > 0), \tag{3}$$
$$w_+(\alpha, u, v, \mu) = \frac{1}{i\alpha + u - v}\int\limits_0^\infty e^{-\mu x}[e^{(i\alpha - v)x} - e^{-ux}]\, d\Pi(x).$$

Согласно теореме 1.8 из [1] справедливо утверждение.

Теорема 1. *Для процесса $\xi(t)$ с кумулянтой* (1) *и $\sigma^2 = 0$ такого, что $M|\xi(1)| < \infty$, имеет место соотношение*

$$sv_+(\alpha; s, u, v, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} s\int\limits_0^\infty M[e^{-s\tau_x^+ - u\gamma^+(x) - v\gamma_+(x) - \mu\gamma_x^+}, \tau_x^+ < \infty]\, e^{i\alpha x} dx =$$
$$= \varphi_+(s, \alpha)\,[\varphi_-(s, \alpha)\, w_+(\alpha, u, v, \mu) + a^+]_+^0. \tag{4}$$

Наша цель — установить аналог соотношения (4) для случая $\sigma^2 > 0$. Следует заметить, что функции $w_+(\alpha) = w_+(\alpha, \ldots)$ в (3) соответствует определенная при $x > 0$ функция

$$W_+(x) = \int_x^\infty e^{(u-v)x-(u+\mu)z} d\Pi(z). \tag{5}$$

Теорема 2. 1) *Для процесса* $\xi(t)$ *с кумулянтой* (2) $(\sigma^2 > 0)$ *и* $M|\xi(1)| < \infty$ *имеет место соотношение*

$$sv_+(\alpha; s, u, v, \mu) = \frac{\sigma^2}{2} P'_-(s, 0)\,\varphi_+(s, \alpha) + \varphi_+(s, \alpha)\,[\varphi_-(s, \alpha)\, w_+(\alpha, u, v, \mu)]_+^0. \tag{6}$$

2) *При непрерывном достижении уровня* $x > 0$ *справедливо соотношение*

$$sM[e^{-s\tau_x^+}, \gamma^+(x) = \gamma_+(x) = \gamma_x^+ = 0, \tau_x^+ < \infty] =$$

$$= P'_+(s, x)\left[\frac{\sigma^2}{2} P'_-(s, 0) + \delta(a > 0, \sigma^2 = 0)\,\mathcal{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\}\right], \tag{7}$$

где $P_\pm(s, x) = \mathcal{P}\{\xi^\pm(\theta_s) < x\}$, $P'_\pm(s, x) = \dfrac{\partial}{\partial x} P_\pm(s, x)$ $(\pm x > 0)$.

Доказательство. Заменим непрерывную составляющую $\xi_0(t) = \sigma W(t)$ $(\sigma^2 > 0)$ ступенчатым процессом с кумулянтой

$$\psi_0^{(\varepsilon)}(\alpha) = \int\limits_{|x| \leqslant \varepsilon\sigma} (e^{i\alpha x} - 1)\, d\Pi_0^{(\varepsilon)}(x), \quad \Pi_0^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varepsilon^{-2}, & -\varepsilon\sigma \leqslant x < 0, \\ -\dfrac{1}{2}\varepsilon^{-2}, & 0 < x \leqslant \varepsilon\sigma. \end{cases}$$

Аппроксимирующая компонента $\xi_0^{(\varepsilon)}(t)$ дает прибавку к функции $W_+(x)$ $(x > 0)$:

$$W_0^{(\varepsilon)}(x) = \int_x^\infty e^{(u-v)x-(u+\mu)z} d\Pi_0^{(\varepsilon)}(z) = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\delta(x \leqslant \varepsilon\sigma)\, e^{-(u-v)x-(u+\mu)\varepsilon\sigma}.$$

Тогда согласно формуле (4) функция $W_0^{(\varepsilon)}(x)$ будет определять дополнительную проекционную часть

$$g_+^{(\varepsilon)}(\alpha) = [\varphi_-^{(\varepsilon)}(s, \alpha)\, w_0^{(\varepsilon)}(\alpha)]_+^0 \tag{8}$$

свертки $W_0^{(\varepsilon)}(x)$ с плотностью распределения

$$p_-^{(\varepsilon)}(s, x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}\{\min_{0 \leqslant u \leqslant \theta_s} \xi^{(\varepsilon)}(u) < x\}, \quad \xi^{(\varepsilon)}(t) = \xi_0^{(\varepsilon)}(t) + [\xi(t) - \xi_0(t)].$$

При вычислении предельного значения $g_+^{(\varepsilon)}(\alpha)$ $(\varepsilon \to 0)$ следует учесть, что проекционной части соотношения (8) соответствует сосредоточенная на $[0, \varepsilon\sigma]$ функция

$$G_+^{(\varepsilon)}(x) = \int_{x-\varepsilon\sigma}^0 p_-^{(\varepsilon)}(s, y) \exp\{(u - v)(x - y) - (u + \mu)\varepsilon\sigma\} \frac{1}{2}\varepsilon^{-2} dy.$$

Воспользовавшись последним соотношением, нетрудно найти для $g_+^{(\varepsilon)}(\alpha)$ выражение, не содержащее операции проектирования $[\ ]_+^0$:

$$g_+^{(\varepsilon)}(\alpha) = \int_0^{\varepsilon\sigma} e^{i\alpha x} \int_{x-\varepsilon\sigma}^0 p_-^{(\varepsilon)}(s, y) \exp\{(u - v)(x - y) - (u + \mu)\varepsilon\sigma\} \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\, dy dx =$$

$$= \int_{-\varepsilon\sigma}^{0} p_{-}^{(\varepsilon)}(s, y)\, e^{(v-u)y} \int_{0}^{\varepsilon\sigma+y} \exp\{(i\alpha + u - v)\, x - (u + \mu)\, \varepsilon\sigma\} \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\, dx dy =$$

$$= \frac{1}{i\alpha + u - v} \int_{-\varepsilon\sigma}^{0} p_{-}^{(\varepsilon)}(s, y)\, [\exp\{(i\alpha - \mu - v)\, \varepsilon\sigma + i\alpha y\} -$$

$$- \exp\{(u + \mu)\, \varepsilon\sigma\}]\, \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\, dy.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_{+}^{(\varepsilon)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\, (i\alpha + u + v)} \int_{\varepsilon\sigma}^{0} p_{-}^{(\varepsilon)}(s, y)\, [i\alpha y + (i\alpha + u - v)\, \varepsilon\sigma]\, \frac{dy}{2\varepsilon} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\, p_{-}(s, 0) \quad (p_{-}(s, x) = P'_{-}(s, x)).$$

Таким образом, при $\sigma^2 > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi_{-}^{(\varepsilon)}(s, \alpha)\, (w_{+}(\alpha) + w_{0}^{(\varepsilon)}(\alpha))]_{+}^{0} = [\varphi_{-}(s, \alpha)\, (w_{+}(\alpha) + a^{+})]_{+}^{0} + \frac{\sigma^2}{2}\, P'_{-}(s, 0) =$$

$$= [\varphi_{-}(s, \alpha)\, w_{+}(\alpha)]_{+}^{0} + \frac{\sigma^2}{2}\, P'(s, 0) \quad ([\varphi_{-}(s, \alpha)\, a^{+}]_{+}^{0} = 0),$$

и соотношение (6) установлено.

Для доказательства п. 1) следует учесть, что предельные значения функции $w_{+}(\alpha)$ (см. (3)) соответственно при u, v, $\mu \to \infty$ вырождаются:

$$w_{+}(\alpha)\,|_{u=\infty} = w_{+}(\alpha)\,|_{v=\infty} = w_{+}(\alpha)\,|_{\mu=\infty} = 0. \tag{9}$$

При $\sigma^2 > 0$ в силу соотношений (8) и (6) находим, что

$$s \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x} M\, [e^{-s\tau_x^{+}},\, \gamma^{+}(x) = \gamma_{+}(x) = \gamma_x^{+} = 0,\, \tau_x^{+} < \infty]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, \sigma^2 P'_{-}(s, 0)\, \varphi_{+}(s, \alpha). \tag{10}$$

Непрерывное достижение положительного уровня возможно и при $\sigma^2 = 0$, если $a > 0$. В этом случае из соотношений (4) и (9) следует, что

$$s \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x} M\, [e^{-s\tau_x^{+}},\, \gamma^{+}(x) = \gamma_{+}(x) = \gamma_x^{+} = 0,\, \tau_x^{+} < \infty]\, dx =$$

$$= \varphi_{+}(s, \alpha)\, [\varphi_{-}(s, \alpha)\, a^{+}]_{+}^{0}. \tag{11}$$

Объединив обращенные по α соотношения (10) и (11), установим п. 2) теоремы 2.

Для непрерывных снизу процессов с независимыми приращениями ($d\,\Pi(x) \equiv 0$ при $x < 0$ и $a < 0$ при $\sigma^2 = 0$)

$$\varphi_{-}(s, \alpha) = \frac{\rho_{-}(s)}{\rho_{-}(s) + i\alpha} \quad (\rho_{-}(s) > 0,\ \psi(i\rho_{-}) = s). \tag{12}$$

Из соотношений (12) можно вывести следствия из теорем 1 и 2.

С л е д с т в и е 1. *Для непрерывных снизу процессов с независимыми приращениями с* $M\,|\,\xi(1)\,| < \infty$ *справедливы соотношения*

$$s\int_0^\infty e^{i\alpha x} M\,[e^{-s\tau_x^+ - u\gamma^+(x)},\ \tau_x^+ < \infty]\,dx = \varphi_+(s,\alpha)\times$$

$$\times\left\{\frac{\sigma^2}{2}\rho_-(s) + \left[\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\,\frac{1}{u+i\alpha}\int_0^\infty (e^{i\alpha x} - e^{-ux})\,d\Pi(x)\right]_+^0\right\}, \tag{13}$$

$$s\int_0^\infty e^{i\alpha x} M\,[e^{-s\tau_x^+ - v\gamma_+(x)},\ \tau_x^+ < \infty]\,dx =$$

$$= \varphi_+(s,\alpha)\left\{\frac{\sigma^2}{2}\rho_-(s) + \left[\frac{\rho_-(s)}{\rho_-(s)+i\alpha}\int_0^\infty e^{(i\alpha - v)x}\Pi(x)\,dx\right]_+^0\right\}, \tag{14}$$

$$s\int_0^\infty e^{i\alpha x} M\,[e^{-s\tau_x^+ - \mu\gamma_x^+},\ \tau_x^+ < \infty]\,dx =$$

$$= \varphi_+(s,\alpha)\left\{\frac{\sigma^2}{2}\rho_-(s) + \left[\frac{\rho_-(s)}{i\alpha(\rho_-(s)+i\alpha)}\int_0^\infty e^{-\mu x}(e^{i\alpha x} - 1)\,d\Pi(x)\right]_+^0\right\}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставив значение $\varphi_-(s,\alpha)$ (см. (12)) в формулу (6), получаем соотношение

$$v v_+(\alpha;\ s, u, v, \mu) = \varphi_+(s,\alpha)\left\{\frac{\sigma^2}{2}\rho_-(s) + \right.$$

$$\left. + [\rho_-(s)(\rho_-(s)+i\alpha)^{-1}\,w_+(\alpha;\ s, u, v, \mu)]_+^0\right\}, \tag{16}$$

из которого соответственно при $u = 0$, $v = 0$ и $\mu = 0$ следуют соотношения (13), (14) и (15).

После несложных преобразований формул (13)—(15) можно избавиться от операции проектирования $[\ \ ]_+^0$ и получить соотношения, удобные для вычисления предельных распределений функционалов τ_x^+, $\gamma^+(x)$, $\gamma_+(x)$ и γ_x^+ при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Не останавливаясь на этих преобразованиях, приведем без доказательства следующие утверждения.

Поскольку в случае $\sigma^2 > 0$ совместная производящая функция $\{\tau_x^+, \gamma^+(x), \gamma_x^+\}$ вырождается при $x \to 0$ ($Me^{-s\tau_0^+ - u\gamma^+(0) - \mu\gamma_0^+} = 1$), то в приведенном ниже следствии приводится результат для соответствующей предельной производящей функции только в случае $\sigma^2 = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Для полунепрерывного процесса с ограниченной вариацией, для которого* $\sigma^2 = 0$ и $a < 0$, *справедливы соотношения*

$$M\,[e^{-s\tau_0^+ - u\gamma^+(0) - \mu\gamma_0^+},\ \tau_0^+ < \infty] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{\rho_-(s)+\mu}{\rho_-(s)-u}\,\tilde{\Pi}(\mu + \rho_-(s)) - \frac{u+\mu}{\rho_-(s)-u}\,\tilde{\Pi}(u+\mu)\right], \tag{17}$$

$$M\,[e^{-s\tau_0^+ - v\gamma_+(0)},\ \tau_0^+ < \infty] = \frac{1}{a}\,\tilde{\Pi}(\rho_-(s) + v), \tag{18}$$

где $\tilde{\Pi}(v) = \int_0^\infty e^{-vx}\Pi(x)\,dx$.

Если учесть, что для непрерывных снизу процессов при $s \to 0$ а) $\rho_-(s) \approx -m_1^{-1} s$ $(m_1 = a - \widetilde{\Pi}(0) < 0)$; б) $\rho_-(s) \approx m_2^{-1}\sqrt{s}$ $\left(m_1 = 0,\ m_2 = \right.$ $\left.= \frac{\sigma^2}{2} - \widetilde{\Pi}'(0) < \infty\right)$; в) $\rho_-(s) \underset{s\to 0}{\to} \rho_-(0) = \rho_- > 0$ $(m_1 > 0)$,
то при предельном переходе по $s \to 0$ и других дополнительных преобразованиях формул (13)—(15) можно найти предельные производящие функции рассматриваемых функционалов при $x \to \infty$.

Следствие 3. 1) *Если для непрерывного снизу процесса с ограниченной вариацией выполнено условие*

$$0 < m_1 < \infty \quad (\rho_- > 0), \tag{19}$$

то справедливы соотношения

$$Me^{-u\gamma^+(\infty)} = \frac{1}{m_1}\rho_-\left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\rho_- - u}(\widetilde{\Pi}(\rho_-) - \widetilde{\Pi}(u))\right], \tag{20}$$

$$Me^{-v\gamma_+(\infty)} = \frac{1}{m_1}\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho_- + \widetilde{\Pi}(\rho_- + v) - \widetilde{\Pi}(v)\right], \tag{21}$$

$$Me^{-\mu\gamma_\infty^+} = \frac{1}{m_1}\left[\frac{\sigma^2}{2}\rho_- + \frac{\mu + \rho_-}{\rho_-}(\widetilde{\Pi}(\rho_- + \mu) - \widetilde{\Pi}(\mu) - \mu\widetilde{\Pi}'(\mu)\right]. \tag{22}$$

2) *При выполнении условия*

$$m_1 = 0,\ m_2 < \infty \quad (\rho_-(s) \approx m_2^{-1}\sqrt{s},\ s \to 0) \tag{23}$$

справедливы соотношения

$$Me^{-u\gamma^+(\infty)} = \frac{1}{m_2}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{u}(\widetilde{\Pi}(u) - \widetilde{\Pi}(0))\right], \tag{24}$$

$$Me^{-v\gamma_+(\infty)} = \frac{1}{m_2}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \widetilde{\Pi}'(v)\right], \tag{25}$$

$$Me^{-\mu\gamma_\infty^+} = \frac{1}{m_2}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2}\mu\widetilde{\Pi}''(\mu) - \widetilde{\Pi}(\mu)\right]. \tag{26}$$

3) *При выполнении условия*

$$m_1 < 0 \quad (\rho_-(s) \approx -m_1^{-1}s,\ s \to 0) \tag{27}$$

и условия Крамера для $\psi(\alpha)$, обеспечивающего асимптотическое представление для вероятности $(x \to \infty)$

$$\begin{gathered}\mathcal{P}\{\tau_x^+ < \infty\} = \mathcal{P}\{\xi^+ > x\} = e^{-s_0 x}(1 + \varepsilon_\pm(x))^{\pm 1}c_0,\\ (\varepsilon_\pm(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0, \quad c_0 = \text{const}; \quad s_0 > 0, \quad \psi(-is_0) = 0),\end{gathered} \tag{28}$$

справедливы соотношения

$$M[e^{-u\gamma^+(\infty)}/\tau_\infty^+ < \infty] = \frac{s_0}{m_1}\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\widetilde{\Pi}(u) - \widetilde{\Pi}(-s_0)}{s_0 + u}\right), \tag{29}$$

$$M[e^{-v\gamma_+(\infty)}/\tau_\infty^+ < \infty] = \frac{s_0}{|m_1|}\left\{\frac{\sigma^2}{2} + s_0^{-1}[\widetilde{\Pi}(v) - \widetilde{\Pi}(v - s_0)]\right\}, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}M[e^{-\mu\gamma_\infty^+}/\tau_\infty^+ < \infty] = \frac{s_0}{m_1}\left[\frac{\sigma^2}{2} + \left(\frac{\mu}{s_0^2} - \frac{1}{s_0}\right)(\widetilde{\Pi}(\mu - s_0) - \widetilde{\Pi}(0)) + \right.\\ \left. + \frac{\mu}{s_0}\widetilde{\Pi}'(-s_0)\right].\end{gathered} \tag{31}$$

Следует отметить, что соотношения (20)—(26) и (29)—(31) допускают обращения соответственно по u, v и μ, что дает возможность определить явный вид распределений предельных функционалов $\gamma^{+}(\infty)$, $\gamma_{+}(\infty)$ и γ_{∞}^{+}. Соотношения (20) и (24) согласуются с результатами работы [2], а соотношения (20), (24) и (29) — с результатами работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак Д. В. Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I: Препринт 78.6.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— 64 с.
2. Фохт А. И. Распределение величины первого перескока для одного класса процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, **21**, № 6, с. 430—434.
3. Супрун В. М. Про величину першого перестрибу через нульовий рівень для однорідного процесу з незалежними приростами й стрибками одного знаку.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 4, с. 317—320.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
21.IV 1979 г.