УДК 518:517.948

В. Д. Диденко

К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции

1. Постановка задачи. Пусть γ — единичная окружность с центром в начале координат, разделяющая плоскость комплексного переменного z на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-.

В настоящей работе строится приближенное решение следующего сингулярного интегрального уравнения

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\{a_k(t)\,\varphi[\alpha_k(t)]+b_k(t)\,\overline{\varphi[\alpha_k(t)]}+\frac{c_k(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha_k(t)}\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\,d_k(t)\,\overline{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha_k(t)}\,d\tau}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}K^{(1)}(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+$$
$$+\,\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}K^{(2)}(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau}=g(t),\quad t\in\gamma, \tag{1}$$

в предположении, что $\alpha(t)$ гомеоморфно отображает γ на себя с сохранением или изменением ориентации и удовлетворяет условию Карлемана

$$\alpha_m(t)\equiv t;\qquad \alpha_k(t)\not\equiv t,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1, \tag{2}$$

где $m\geqslant 2$ — натуральное число, $\alpha_k(t)=\alpha[\alpha_{k-1}(t)]$, $\alpha_0(t)\equiv t$. Кроме того, считаем, что $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, $0<\mu\leqslant 1$.

Отметим, что приближенные решения различными методами задач, близких к (1), рассматривались в работах [1—4].

При построении приближенного решения уравнения (1) используем некоторые результаты теории приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений, приводимые в данной заметке без доказательства.

2. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений без сдвига

$$(K\varphi)(t) \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \qquad (3)$$

где $K(t,\tau) = h^{(0)}(t,\tau)|t-\tau|^{-\nu}$, $0 \leqslant \nu < 1$; $A(t)$, $B(t)$, $h^{(0)}(t,\tau)$ — интегрируемые в смысле Римана ($\in R_{m\times m}$) квадратные матрицы-функции порядка m, $f(t) \in R_m$.

Предположим, что матрица $G(t) = [A(t) + B(t)]^{-1}[A(t) - B(t)]$ допускает правую факторизацию

$$G(t) = G_-^{-1}(t)\Lambda(t)G_+(t), \qquad (4)$$

где $G_+(t)$ и $G_-(t)$—матрицы, аналитические и невырожденные соответственно в областях D^+ и D^-; $\Lambda(t) = (t^{\varkappa_j}\delta_{jk})_{j,k=1}^m$; $\varkappa_j$, $j = \overline{1,m}$ — правые частные индексы матрицы $G(t)$, δ_{jk} — символ Кронекера.

Приближенное решение уравнения (3) будем искать в виде интерполяционного вектор-полинома

$$x_{kn}(t) = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}c_{kj}D_n(s - s_j), \quad t = e^{is}, \quad k = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

В последнем соотношении $D_n(\varphi)$ — ядро Дирихле порядка n, а t_k, $k = \overline{1, 2n+1}$ — узлы интерполирования

$$t_k = e^{is_k}, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{1, 2n+1}. \qquad (6)$$

Неизвестные коэффициенты $\{c_{kj}\}$ находим из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}A_{rkj}c_{kj} + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2n+1}B_{rkj}\alpha_{jp}c_{kp} +$$

$$+ \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{2n+1}t_p h_{\rho rkjp}c_{kp} = f_{rj}, \quad r = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1, 2n+1}, \qquad (7)$$

в которой $A_{rkj} = A_{rk}(t_j)$, $B_{rkj} = B_{rk}(t_j)$, $f_{rj} = f_r(t_j)$, $\alpha_{jp} = 1 - i\beta_{jp}$, $\beta_{jp} = \operatorname{tg}\frac{s_j - s_p}{4}$ или $\operatorname{ctg}\frac{s_p - s_j}{4}$ при $j - p$ — четном или нечетном соответственно, а

$$h_{\rho rkjp} = h_{\rho rk}(t_j, t_p) = h_{rk}^{(0)}(t_j, t_p)\, l_{\rho jp},$$

$$l_{\rho jp} = \begin{cases} 2^{-\nu}\sin^{-\nu}\dfrac{\pi|j-p|}{4}, & \text{при } |t_j - t_p| \geqslant \rho, \\ \rho^{-\nu}, & \text{при } |t_j - t_p| < \rho. \end{cases}$$

Пусть

$$\varepsilon_1(n, \rho, p, m) = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{r=1}^{m}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{s=1}^{m}R_{rs}(t)h_{\rho sk}(t,\tau) - \right.\right.\right.$$

$$- P_n^t\left(\sum_{s=1}^{m} R_{rs}(t)\, h_{\rho sk}(t,\tau)\right)\Bigg|^q d\sigma\Bigg)^{p/q} ds\Bigg|^{1/p}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad t=e^{is}, \quad \tau=e^{i\sigma}, \quad h_{\rho sk}(t,\tau)=h_{sk}^{(0)}(t,\tau)\, l_\rho(t,\tau),$$

$$l_\rho(t,\tau)=\begin{cases}|t-\tau|^{-\nu}, & |t-\tau|\geqslant\rho\\ \rho^{-\nu}, & |t-\tau|<\rho,\end{cases}$$

где P_n^t — оператор Лагранжа, проектирующий функции из R на подпространство полиномов вида (5); $R_{rs}(t)$ — элементы матрицы $R(t) = G_-(t)\,[A(t)+B(t)]^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть оператор* K *обратим слева в* $L_{p,m}$, $1<p<\infty$, *и система сингулярных интегральных уравнений* (3) *при данной правой части* $f(t)$ *разрешима. Если матрица* $G(t)$ *такова, что* $G_+(t)$ *и* $G_-(t)$ *в* (4) *непрерывны, ее правые частные индексы неотрицательны и* $\varepsilon_1(n,\rho,p,m)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *то система линейных алгебраических уравнений* (7) *однозначно разрешима при всех достаточно малых* ρ *и всех достаточно больших* n *и приближенные решения* $x_{\rho n}(t)$, *построенные по формулам* (5), *сходятся в среднем с показателем* p, $1<p<\infty$, *к точному решению уравнения* (3) *в том смысле, что*

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\|x^*(t)-x_{\rho n}(t)\|_{L_{p,m}}=0. \tag{9}$$

В доказательстве данной теоремы используем результаты работ [5—7].

Замечание 1. Принадлежность $A(t)$ и $B(t)$ классу матриц-функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β, $0<\beta\leqslant 1$ или классу матриц-функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, обеспечивает непрерывность канонических матриц $G_+(t)$ и $G_-(t)$.

Замечание 2. Если $p=q=2$ и $h^{(0)}(t,\tau)\in R_{m\times m}$, то $\varepsilon_1(n,\rho,2,m)\to 0$. В случае произвольного p, $1<p<\infty$, из результатов [5, 6] при $A(t)$, $B(t)$, $G_-(t)$, $h^{(0)}(t,\tau)\in C_{m\times m}$ для $\varepsilon_1(n,\rho,p,m)$ получаем оценку

$$\varepsilon_1(n,\rho,p,m)\leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{r=1}^{m}E_n^t(R_{rs}(t)\,h_{\rho sk}(t,\tau)),$$

где $E_n^t(f)$ означает наилучшее равномерное приближение функции $f(t,\tau)$ по переменной t равномерно относительно τ.

3. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестной функции. Присоединим к уравнению (1) уравнение, полученное из (1) переходом к комплексно сопряженным значениям, и введем новые неизвестные функции $\varphi_1(t)=\varphi(t)$, $\varphi_2(t)=\overline{\varphi(t)}$. Применяя преобразования

$$\overline{\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau}=-\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\overline{\varphi(\tau)\,\tau}\,d\tau, \tag{10}$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\overline{K(t,\tau)\,\tau^2}\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

приходим к следующей системе со сдвигом Карлемана относительно вектора $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\{a_k(t)\varphi_1[\alpha_k(t)] + b_k(t)\varphi_2[\alpha_k(t)] + \frac{c_k(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_1(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha_k(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{d_k(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_2(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha_k(t)}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^{(1)}(t,\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\overline{K^{(2)}(t,\tau)\tau^2} + 2\tau^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} d_k(t)\right]\varphi_2(\tau)\,d\tau = g(t),$$
$$\tag{12}$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} \overline{b_k(t)}\varphi_1[\alpha_k(t)] + \overline{a_k(t)}\varphi_2[\alpha_k(t)] + \frac{\overline{d_k(t)}}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_1(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha_k(t)} -$$
$$- \frac{\overline{c_k(t)}}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi_2(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha_k(t)}\Bigg\} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K^{(2)}(t,\tau)\varphi_1(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\overline{K^{(1)}(t,\tau)\tau^2} + 2\tau^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} \overline{c_k(t)}\right]\varphi_2(\tau)\,d\tau = \overline{g(t)}.$$

Уравнение (1) и система (12) эквивалентны в том смысле, что всякому решению уравнения (1) соответствует решение системы (12), выражающееся через решение уравнения (1), и, наоборот, если $x(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ — решение системы (12), то соответствующее решение уравнения (1) может быть построено по формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(t) + \overline{\varphi_2(t)}\right). \tag{13}$$

Присоединяя к уравнениям (12) еще $2m-2$ уравнения, полученных из (12) заменой t соответственно на $\alpha_k(t)$, $k=\overline{1, m}$, и вводя затем с помощью формул $x_k(t) = \varphi_1[\alpha_k(t)]$, $y_k(t) = \varphi_2[\alpha_k(t)]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, неизвестный $2m$-мерный вектор $x(t) = \{x_0(t), \ldots, x_{m-1}(t), y_0(t), \ldots, y_{m-1}(t)\}$, получаем систему сингулярных интегральных уравнений вида (3), причем $\nu = 1-\mu$, а $h^{(0)}(t,\tau)$ ограничена на γ [8]. Дополнительно предположим, что $h^{(0)}(t,\tau)$ — матрица, интегрируемая в смысле Римана (равномерно по каждой из переменных t, τ).

Теорема 2. *Пусть для получаемой описанным выше методом системы сингулярных интегральных уравнений выполнены все условия теоремы* 1 *и* $\{x_{\rho 0n}, x_{\rho 1n}, \ldots, x_{\rho, m-1, n}, y_{\rho 0n}, y_{\rho 1n}, \ldots, y_{\rho, m-1, n}\}$ — *приближенное решение этой системы. Тогда приближенные решения уравнения* (1), *построенные по формуле*

$$x^*_{\rho n}(t) = \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1} x_{\rho kn}[\alpha_{m-k}(t)] + \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1}\overline{y_{\rho kn}[\alpha_{m-k}(t)]},$$

сходятся в среднем с показателем p, $1 < p < \infty$, *к точному решению уравнения* (1) *в смысле* (9).

Доказательство. Пусть выполняются все условия теоремы 2. Легко показать, что

$$x(t) = \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} x_k[\alpha_{m-k}(t)],\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k[\alpha_{m-k}(t)]\right\},$$

где $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}\}$ — решение системы (3), будет решением системы (12). Отсюда, из теоремы 1, соотношения (13) и ограниченности оператора W_α, $(W_\alpha \varphi)(t) = \varphi[\alpha(t)]$, в пространстве L_p и следует утверждение теоремы 2.

Замечание 3. Здесь рассмотрен случай скалярного уравнения (1). Очевидно, предложенный метод без особых изменений можно распространить на системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными значениями неизвестных функций.

Замечание 4. Накладывая более жесткие ограничения на коэффициенты и правую часть уравнения (1), можно обосновать сходимость приближенных решений уравнения (1) к точному в гельдеровской и равномерной метриках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихоненко Н. Я. К приближенному решению некоторых краевых задач со сдвигом.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 1, с. 120—123.
2. Кадушин В. П. К прямым методам решения одного класса сингулярных интегральных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 11, с. 109—111.
3. Иваницкий В. Г. Приближенное решение одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом методом осреднения функциональных поправок.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 5, с. 700—705.
4. Тихоненко Н. Я. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений и краевых задач со сдвигом.— ДАН СССР, 1976, **230**, № 2, с. 291—294.
5. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— Киев.: Наук. думка, 1968.— 287 с.
6. Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н. Метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1974, № 12, с. 3—14.
7. Габдулхаев Б. Г. Некоторые вопросы теории приближенных методов. IV.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 6, с. 15—23.
8. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.— 448 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию 18.IX 1978 г.;
после переработки — 10.IV 1979 г.