УДК 62—50

С. В. Зубарев

О принципе максимума в одном квазигиперболическом уравнении

В работе [1] доказывался принцип максимума для квазигиперболического уравнения, в формулировке которого участвовали два множителя Лагранжа w_1 и w_2. В настоящей заметке этот же результат записывается в эквивалентной форме при использовании одного гладкого множителя Лагранжа $w(x, t)$. Управляемый процесс описывается уравнением

$$L[u] \equiv u_{tt} + a^2 u_{x^4} - b^2 u_{x^2t^2} + \mu u_{x^4t} + cu = f_1^1(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3}, v) +$$

$$+ \varepsilon f_2^1(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3}, u_{x^4}, v)$$

с начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{t=0} = \Psi(x), \quad u|_{x=0}^{x=l} = u_{x^2}|_{x=0}^{x=l} = 0,$$

в области G: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Требуется минимизировать функционал:

$$\perp[v] = \int_0^l f_1^0(x, T, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3})\, dx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l f_2^0(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3}, u_{x^4}, v)\,dxdt.$$

Из прочих условий, накладываемых на параметры уравнения и функции φ, Ψ, f_1^1, f_2^1, f_1^0, f_2^0, выпишем условия на концах:

$$\frac{\partial^2 f_1^0}{\partial u_{x^2t}}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = \frac{\partial^2 f_2^i}{\partial u_x \partial u_{x^4}} = \Bigg|_{x=0}^{x=l} = \frac{\partial^2 f_2^i}{\partial u_{xt}\partial u_{x^4}}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = \frac{\partial^2 f_2^i}{\partial u_{x^3}\partial u_{x^4}}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0; \quad i = 0, 1.$$

Теорема. *Для того чтобы функционал* $\perp[v]$ *достигал своего наименьшего значения, необходимо, чтобы выполнялся принцип максимума*

$$H(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3}, u_{x^4}, w, v) \quad ((=))$$

$$((=)) \sup_{v\in V} H(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{x^2}, u_{x^2t}, u_{x^3}, u_{x^4}, w, v).$$

Функция H определяется равенством $H = -f_2^0 + w(f_1^1 + \varepsilon f_2^1)$, а вспомогательная функция w удовлетворяет уравнению

$$L^*[w] = \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial u_x}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial H}{\partial u_t}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{xt}}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{x^2}}\right] -$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{x^2t}}\right] - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{x^3}}\right] + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{x^4}}\right]$$

с начально-краевыми условиями

$$b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\,|_{t=T} = \left\{\frac{\partial f_1^0}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f_1^0}{\partial u_{xt}}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial f_1^0}{\partial u_{x^2t}}\right]\right\}\Bigg|_{t=T},$$

$$b^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\Bigg|_{t=T} = \Bigg\{-\frac{\partial}{\partial x}\left[w\left(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_{xt}} + \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{xt}}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigg[w\Bigg(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_{x^2t}} +$$

$$+\varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^2t}}\Bigg)\Bigg] + w\left(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_t} + \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_t}\right) - \frac{\partial f_1^0}{\partial u} - \frac{\partial f_2^0}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1^0}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_2^0}{\partial u_{xt}}\right) -$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial f_1^0}{\partial u_{x^2}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1^0}{\partial u_{x^3}}\right) + \frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^2t}}\right]\Bigg\}\Bigg|_{t=T},$$

$$\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = \Bigg\{\frac{\partial}{\partial x}\left[w\left(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_{x^3}} + \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^3}}\right)\right] + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^4}}\right) -$$

$$-w\left(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_{x^2}} + \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left[w\left(\frac{\partial f_1^1}{\partial u_{x^2t}} + \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^2t}}\right)\right] + \frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^2}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^2t}}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^3}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^4}}\right) + b^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Bigg\}\Bigg|_{x=0}^{x=l};$$

$$\mu\frac{\partial w}{\partial t} - \left(a^2 - \varepsilon\frac{\partial f_2^1}{\partial u_{x^4}}\right)w\Bigg|_{x=0}^{x=l} = \frac{\partial^2 f_2^0}{\partial u_x}\Bigg|_{x=0}^{x=l}, \quad w(x, T)\,|_{x=0}^{x=l} = 0,$$

$$b^2\frac{\partial w(x, T)}{\partial t}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = -\left[\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial f_1^0}{\partial u_{x^2}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1^0}{\partial u_{x^3}}\right) + \frac{\partial f_2^0}{\partial u_{x^2t}}\right]\Bigg|_{t=T}\Bigg|_{x=0}^{x=l}.$$

L^* — оператор, сопряженный оператору L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубарев С. В. Применение асимптотических методов к оптимальным задачам, описывающимся квазигиперболическими уравнениями: Препринт 79.20 — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— 20 с.

Институт механики
АН УССР

Поступила в редакцию
14.II 1980 г.