УДК 517.544

Н. С. Коверный, С. А. Яценко

Обобщенная краевая задача Римана для сложного контура

Пусть на плоскости задан конечный сложный контур Γ, т. е. замыкание множества, состоящего из конечного числа ориентированных (замкнутых или разомкнутых) кривых, которые могут иметь конечное число общих точек — узлов. На Γ задан дивизор $\Lambda = t_1 t_2 \ldots t_r$, состоящий из конечного числа попарно различных точек. К точкам отнесем начала (концы) кривых, составляющих Γ (они могут, в частности, совпадать). Обозначим через $\{\Gamma\}$ множество точек контура Γ. Дивизор Λ должен удовлетворять условию: множество $\{\Gamma\} \setminus \Lambda$ распадается на конечное число связных компонент $\{\Gamma\}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, каждая из которых — разомкнутая открытая кривая Ляпунова; кроме того, предположим, что если $\{\Gamma_j\}$ и $\{\Gamma_k\}$ имеют общую точку, то либо кривая $\{\Gamma_j\} \cup \{\Gamma_k\}$ ляпуновская, либо в этой точке касательные к этим кривым не совпадают. Введем функцию $\alpha(t, \Gamma_i) = \delta_{ki}$, $t \in \Gamma_k$ $(k, i = 1, 2, \ldots, N)$, где $\delta_{k,i}$ — символ Кронекера. На каждой кривой Γ_k задана непрерывная функция $a_{ki}(t)$, конечная, не обращающаяся в нуль, непрерывно продолжимая на начальную и концевую точки кривой Γ_k, причем предельные значения предполагаются конечными, отличными от нуля и не обязательно различными. Обозначим

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha(t, \Gamma_i)\, a_i(t), \quad t \in \{\Gamma\} \setminus \Lambda. \tag{1}$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду на плоскости, за исключением контура Γ, представима интегралом типа Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \ \ \mu(\tau) \in L_p(\Gamma)$$

и предельные значения $f^{\pm}(t)$ на Γ принадлежат пространству $L_p(\Gamma)$. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $H_p(\Gamma)$.

О п р е д е л е н и е 2. Сопряженным к $H_p(\Gamma)$ назовем класс $H_q(\Gamma)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Изложенных данных достаточно для того, чтобы сформулировать следующую краевую задачу: найти все функции $\varphi(z) \in H_p(\Gamma)$ по условию

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\, \varphi^{-}(t) + b(t)\, \overline{\varphi - (t)} + c(t), \ \ t \in \Gamma, \varphi^{-}(\infty) = 0, \tag{2}$$

где $b(t)$ и $c(t)$ — заданные на Γ аналогично $a(t)$ функции: $b(t)$ измеримая, а $c(t) \in L_p(\Gamma)$. Задачу (2), как обычно, будем называть неоднородной, при $c(t) \equiv 0$ — однородной. Множество решений однородной задачи — линейное пространство над полем вещественных чисел; в этом смысле будем понимать линейную зависимость, число решений или условий разрешимости

Для функции $a(t)$ и каждой точки $t_k \in \Lambda$ определим два числа $a(t_k - 0)$ и $a(t_k + 0)$ следующим образом: $a(t_k - 0) = \prod\limits_i a_i(t_k - 0)$, $a(t_k + 0) = \prod\limits_j a_j(t_k + 0)$, где произведение $\prod\limits_i \left(\prod\limits_j\right)$ распространяется на кривые Γ_i, оканчивающиеся (начинающиеся) в точке t_k. Если кривых, начинающихся (оканчивающихся) в t_k, нет, то произведение $\prod\limits_i \left(\prod\limits_j\right)$ пусто; в этом случае полагаем $a(t_k - 0) = 1$ $(a(t_k + 0) = 1)$, при $t_k \overline{\in} \Lambda$ значения $a(t_k - 0)$ и $a(t_k + 0)$ совпадают с $a(t_k)$. Функции $a(t)$ поставим в соответствие функцию $a^p(t, \nu)$, определенную на $\Gamma \times [0, 1]$ равенством $a^p(t, \nu) = a(t + 0) f_\delta(\nu) + a(t - 0)(1 - f_\delta(\nu))$ $\left(t, \in \Gamma;\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1;\ \delta = \frac{2\pi}{p}\right)$, где функция $f_\delta(\nu)$ определяется формулой

$$f_\delta(\nu) = \begin{cases} \dfrac{\sin \theta\nu}{\sin \theta} e^{i\theta(\nu - 1)}, & \theta = \pi - \delta,\ 0 < \delta < 2\pi,\ \delta \neq \pi, \\ \nu & \delta = \pi. \end{cases} \tag{3}$$

Определение 3. Функцию $a(t)$ назовем p-неособенной, если $a^p(t, \nu) \neq 0$ $(t \in \Gamma,\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1)$.

Определение 4. Число, определенное равенством

$$\operatorname{Ind} a^p(t, \nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} [\arg a(t)]_{\Gamma_j} + \frac{1}{2\pi} [\arg \{a(t_k + 0) f_\delta(\nu) + a(t_k - 0)(1 - f_\delta(\nu))\}]_{\nu=0}^{1} = \varkappa, \tag{4}$$

называется p-индексом данной функции. Можно показать, что это число целое.

Функция $a(t)$ допускает p-факторизацию в $L_p(\Gamma)$, т. е. существует такая функция $X(z)$, что почти всюду на контуре Γ справедливо равенство

$$a(t) = X^+(t) [X^-(t)]^{-1}, \tag{5}$$

где $X(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

А. $X(z) \in H_p(\Gamma)$, $X^{-1}(z) \in H_q(\Gamma)$, и $X(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов вне Γ, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой ее порядок равен $(-\varkappa)$.

Б. Оператор $X^\pm P_\Gamma (X^+)^{-1}$, решающий задачу Римана, ограничен в $L_p(\Gamma)$. Здесь оператор проектирования P_Γ действует по правилу $(P_\Gamma \mu)(t) = \frac{\mu(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$, $t \in \Gamma$. Из свойства Б вытекает ограниченность оператора $X^\pm Q_\Gamma (X^+)^{-1}$ в $L_p(\Gamma)$. Q_Γ — оператор проектирования, действующий по правилу

$$(Q_\Gamma \mu)(t) = \frac{\mu(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} dt,\ t \in \Gamma.$$

Известно, что оператор $(S_\Gamma \mu)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$, $t \in \Gamma$, линейный, ограниченный в $L_p(\Gamma)$, $p > 1$.

Теорема. *Пусть* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — *(функции вида* (1)) — *коэффициенты задачи* (2), *а*

$$\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| < \frac{1}{\|X^+Q_\Gamma(X^+)^{-1}\|L_p(\Gamma)}.$$

Тогда при $\varkappa > 0$ ($\varkappa = \operatorname{Ind} a^p(t, \nu)$) *однородная задача* (2) *имеет* $2-\varkappa$ *линейно независимых решений, а неоднородная — безусловно разрешима. При* $\varkappa = 0$ *задача имеет единственное решение, нулевое для однородной. При* $\varkappa < 0$ *однородная задача имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно* $2|\varkappa|$ *условий* $S_k(c) = 0$, *где* S_k — *линейно независимые функционалы. При выполнении условий разрешимости решение существует и единственно.*

Доказательство проводится в несколько этапов [1, 2].

1. $a(t) \equiv 1$. Полагая $\varphi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{\tau - z}\,d\tau$, $\mu(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, можем записать для почти всех $t \in \Gamma$

$$\varphi^\pm = \frac{1}{2}(\mu + S\mu) \equiv P_\Gamma\mu,\ \varphi^- = \frac{1}{2}(-\mu + S\mu) \equiv -Q_\Gamma\mu,$$

$$\mu = \varphi^+ - \varphi^-,\ S\mu \equiv \varphi^+ + \varphi^-. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2), получаем интегральное уравнение

$$\mu = -b\mathfrak{C}Q_\Gamma\mu + c \tag{7}$$

($\mathfrak{C}$ — оператор сопряжения, действующий по правилу $(\mathfrak{C}f)(t) \equiv \overline{f(t)}$) в силу (6) эквивалентное краевой задаче (2). Здесь можем положить

$$X(z) \equiv 1 \text{ и } \|Q_\Gamma\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant \frac{1 + \|S\|_{L_p(\Gamma)}}{2}. \tag{8}$$

Если $\dfrac{1}{2}(1 + \|S\|_{L_p(\Gamma)}\sup\limits_{t\in\Gamma}|b(t)| < 1$, то согласно принципу сжатых отображений уравнение (7) имеет решение, и притом единственное, для всякого $c(t) \subset L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Причем $\mu \in L_p(\Gamma)$, $\varphi^\pm(t) \in L_p(\Gamma)$ [2].

2. $a(t) \not\equiv 1$, $p > 1$. Введем новую неизвестную функцию по формуле

$$\varphi^+(t) - a(t)\varphi^-(t) = \mu(t). \tag{9}$$

Используя p-факторизацию $a(t)$ в $L_p(\Gamma)$, (9) перепишем так:

$$\frac{\varphi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\varphi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{\mu(t)}{X^+(t)}. \tag{9'}$$

Применяя к этой задаче (по скачку) проекторы P_Γ и Q_Γ из (6), выразим $\dfrac{\varphi^+}{X^+} = P_\Gamma\dfrac{\mu}{X^+}$, $\dfrac{\varphi^-}{X^-} = Q_\Gamma\dfrac{\mu}{X^+}$ или

$$\varphi^+ = X^+P_\Gamma\frac{\mu}{X^+},\ \varphi^- = X^-Q_\Gamma\frac{\mu}{X^+}. \tag{10}$$

Используя представления (10), сведем задачу (2) к интегральному уравнению

$$\mu(t) = b(t)\,\mathfrak{C}X^-(t)\,(Q_\Gamma[X^+]^{-1}\mu)\,(t) + c(t). \tag{10'}$$

Получилось интегральное уравнение первого рода. При выполнении условия сжатия

$$\sup_{t\in\Gamma} |b(t)|\,\| X^{-} Q_{\Gamma} [X^{+}]^{-1} \|_{L_p(\Gamma)} < 1 \tag{11}$$

уравнение (10) имеет единственное решение $\mu_0(t)$ в банаховом пространстве $L_p(\Gamma)$, т. е. $\mu_0(t) \in L_p(\Gamma)$. Используя равенство $X^{+}(t) = a(t) X^{-}(t)$, получаем неравенство, фигурирующее в формулировке теоремы.

Решение задачи (2) отыскивается, как и решение задачи Римана [3], по формуле

$$\varphi(z) = X(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\tau)}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}\,. \tag{12}$$

3. $\varkappa > 0$. Чтобы перейти к предыдущему случаю, требуется погасить p-индекс $a(t)$. Окружим Γ замкнутой ляпуновской кривой Γ_{N+1} и ориентируем ее так, чтобы область (обозначим ее через D^{+}), ограниченная Γ_{N+1}, содержала в себе Γ и при обходе Γ_{N+1} в положительном направлении D^{+} оставалась слева. Дополнение $\overline{D^{+}}$ до полной плоскости обозначим через D^{-}. Краевое условие (2) доопределим на Γ_{N+1} следующим образом: положим $a(t) \equiv 1$, $b(t) = c(t) \equiv 0$; имеем $\varphi^{+}(t) = \varphi^{-}(t)$, $t \in \Gamma_{N+1}$. Полученная краевая задача равносильна исходной (2). Введем новую неизвестную функцию:

$$\varphi_{*}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{если } z \in D^{-}, \\ (t - z_0)^{-\varkappa} [\varphi(z) - \mathcal{P}_{\varkappa-1}(z)], & \text{если } z \in D^{+}. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь z_0 — некоторая точка, выбранная внутри той связной компоненты $D^{+} \diagdown \{\Gamma\}$, одной из граничных кривых которой является Γ_{N+1}. $\mathcal{P}_{\varkappa-1}(z)$ — полином степени $\varkappa - 1$, подобранный так, чтобы функция $\varphi_{*}(z) = (z - z_0)^{-\varkappa} [\varphi(z) - \mathcal{P}_{\varkappa-1}(z)]$ не имела полюса в точке z_0.

Функция $\xi(t) = (t - z_0)^{-\varkappa}$ непрерывна и не обращается в нуль при $t \in \Gamma \cup \Gamma_{N+1}$. Пусть $\xi^{p}(t, \nu)$ — функция двух переменных, построенная аналогично функции $a^{p}(t, \nu)$ для $a(t)$. Тогда $\operatorname{Ind}_{\Gamma\cup\Gamma_{N+1}} \xi^{p}(t, \nu) = \frac{1}{2\pi} [\arg (t - z_0)^{-\varkappa}] = -\varkappa$. Но $\operatorname{Ind}_{\Gamma\cup\Gamma_{N+1}} a^{p}(t, \nu) = \operatorname{Ind}_{\Gamma} a^{p}(t, \nu) = \varkappa$. Положим

$$a_1(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } t \in \Gamma, \\ (t - z_0)^{-\varkappa}, & \text{если } t \in \Gamma_{N+1}, \end{cases} \qquad b_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\overline{(t - z_0)^{-\varkappa}}}{(t - z_0)^{\varkappa}}, & \text{если } t \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } t \in \Gamma_{N+1}, \end{cases} \tag{14}$$

$$c_1(t) = \begin{cases} c(t) + a(t)\mathcal{P}_{x-1}(t) + b(t)\mathcal{P}_{\varkappa-1}(t) - \mathcal{P}_{\varkappa-1}(t), & \text{если } t \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } t \in \Gamma_{N+1}. \end{cases}$$

Учитывая (13), условие (2) запишем в виде

$$\varphi_{*}^{+}(t) = a_1(t)\varphi_{*}^{-}(t) + b_1(t)\overline{\varphi_{*}^{-}(t)} + c_1(t). \tag{15}$$

Так как $\left|\frac{b_1(t)}{a_1(t)}\right| = \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|$, $t \in \Gamma \cup \Gamma_{N+1}$, $\operatorname{Ind}_{\Gamma\cup\Gamma_{N+1}} a_1^{p}(t, \nu) = \operatorname{Ind}_{\Gamma} a^{p}(t, \nu) + \operatorname{Ind}_{\Gamma_{N+1}} \xi(t) = 0$, то при $b(t) \in L_p(\Gamma)$ имеем случай 2. При этом $c_1(t) \in L_p(\Gamma)$ и решение $\varphi(z) \in H_p(\Gamma)$. Задача имеет единственное решение при каждом $c_1(t)$. Полагая $c_1(t) = 0$ и $\mathcal{P}_{\varkappa-1}(t)$ последовательно равным $1, i; t, it; \ldots; t^{\varkappa-1}, it^{\varkappa-1}$, получим серию задач (15), из которой находим линейно независимые решения однородной задачи (2). При $\mathcal{P}_{\varkappa-1}(z) = 0$, но $c(t) = 0$, строим частное решение неоднородной задачи. При $\varkappa < 0$ все сказанное будет верным для $\varphi_*^{\pm}(z)$, $\mathcal{P}_{\varkappa-1}(z) = 0$, но $\varphi(z) = (z - z_0)^{\varkappa}\varphi_*(z)$ будет иметь полюс порядка $|\varkappa|$ в точке z_0. Для его погашения запишем решение интегрального уравнения, соответствующего задаче (15), в виде ($\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma_{N+1}$) $\mu(t) = (\{I_{\Gamma_1} - b_1(t)\,\mathfrak{C}X^-(t)\,Q_{\Gamma_1}[X^+]^{-1}\}^{-1} c_1)(t)$. Здесь I_{Γ_1} — единичный оператор. Разложим в ряд интеграл типа Коши

$$\varphi_*(z) = X(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{(\tau - z)\,X^+(\tau)},\quad \varphi_*(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(z - z_0)^{k-1},$$

$$\text{где}\quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu(\tau)}{(\tau - t_0)^k}\,d\tau.$$

Для аналитичности $\varphi_*(z)$ в точке z_0 необходимо, чтобы первые $(-\varkappa)$ коэффициентов разложения $\varphi_*(z)$ обратились в нуль, что приводит к условиям разрешимости: $\int\limits_{\Gamma}(t - z_0)^{-k}\,[(\{I_{\Gamma} - b(t)\,\mathfrak{C}X^-(t)\,Q_{\Gamma}[X^+]^{-1}\}c_1)(t)]\,dt = 0$, $k = 1, 2, \ldots, |\varkappa|$, так как $b_1(t) = c_1(t) = 0$ при $t \in \Gamma_{N+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симоненко И. Б. Краевые задачи Римана и Римана — Газемана с непрерывными коэффициентами.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1961, с. 380—389.
2. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.— Душанбе, 1963.— 182 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд., испр. и доп.— М.: Наука, 1977.— 640 с.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
28.X 1979 г.