УДК 517.5

А. А. Лигун

О приближении периодических функций сплайнами минимального дефекта

1. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x \in X$, $F \subset X$ и $H \subset X^*$. Обозначим через $E(F, X, x)$ наилучшее приближение элемента x множеством F в метрике пространства X, т. е.

$$E(F, X, x) = \inf_{u \in F} \| x - u \|_X, \tag{1}$$

а через $E(F, H, X, x)$ — наилучшее приближение с ограничением H элемента x множеством F в метрике пространства X, т. е.

$$E(F, H, X, x) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in F(x)} \| x - u \|_X & (F(x) \neq \varnothing), \\ \infty & (F(x) = \varnothing, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$F(x) = F(H, x) = \{u \in F : \forall_{g \in H}\, g(x) = g(u)\}. \tag{3}$$

Следующее утверждение легко получается из теоремы двойственности для наилучших приближений (см., например, [1, с. 28]).

Теорема 1. *Пусть F — выпуклое множество линейного нормированного пространства X, а H — подпространство пространства X^*. Тогда для любого элемента $x \in X$ имеет место равенство*

$$E(F, H, X, x) = \sup_{\substack{f\in X^* \\ E(H,X^*,f)\leqslant 1}} (f(x) - \sup_{u\in F} f(u)). \tag{4}$$

В частности, если F — подпространство пространства X, то

$$E(F, H, X, x) = \sup_{\substack{f\in X^*,\ \forall u\in F f(u)=0 \\ E(H,X^*,f)\leqslant 1}} f(x). \tag{5}$$

В несколько иной постановке двойственные соотношения для задач наилучшего приближения с ограничениями исследовались в [2, гл. 8 и 9]. Отметим, что равенства (4) и (5) можно было бы вывести и из результатов, приведенных в [2]. При этом пришлось бы повторить примерно такие же рассуждения, как и приведенные ниже.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что

$$\sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\leqslant 1} \sup_{g\in H} (f(x) - g(x) - \sup_{u\in F}(f(u) - g(u))) =$$

$$= \sup_{g\in H} \sup_{\substack{\varphi+g\in X^* \\ \|\varphi+g\|_{X^*}\leqslant 1}} (\varphi(x) - \sup_{u\in F}\varphi(u)) = \sup_{\substack{\varphi\in X^* \\ E(H,X^*,\varphi)\leqslant 1}} (\varphi(x) - \sup_{u\in F}\varphi(u)).$$

Следовательно, для доказательства равенства (4) достаточно установить, что

$$E(F, H, X, x) = \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\leqslant 1} \sup_{g\in H} (f(x) - g(x) - \sup_{u\in F}(f(u) - g(u))). \tag{6}$$

Если $F(x) = \varnothing$, то обе части равенства (6) обращаются в бесконечность. Пусть $F(x) \neq \varnothing$. Тогда в силу выпуклости множества F выпуклым является и множество $F(x)$. Следовательно, применима теорема двойственности для наилучших приближений [1, с. 28]. В силу этой теоремы

$$E(F, H, X, x) = E(F(x), X, x) = \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\leqslant 1} (f(x) - \sup_{u\in F(x)} f(u)) =$$

$$= \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\leqslant 1} \inf_{u\in F(x)} (f(x) - f(u)) = \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\leqslant 1} \sup_{g\in H} \inf_{u\in F(x)} (f(x) -$$

$$- g(x) - (f(u) - g(u))).$$

Но для любого функционала $f \in X^*$, $f \neq 0$ и любого элемента $u \in F \setminus F(x)$ $\sup_{g\in H}(f(x) - g(x) - (f(u) - g(u))) = \infty$. Поэтому для любого функционала $f \in X^*$ справедливы соотношения

$$\sup_{g\in H} \inf_{u\in F(x)} (f(x) - g(x) - (f(u) - g(u))) = \sup_{g\in H} \inf_{u\in F} (f(x) - g(x) -$$

$$- (f(u) - g(u))) = \sup_{g\in H} (f(x) - g(x) - \sup_{u\in F}(f(u) - g(u))),$$

что и завершает доказательство равенства (6), а с ним и теоремы 1.

2. Пусть L_p ($p \in [1, \infty)$) — пространство измеримых 2π-периодических суммируемых с p-й степенью функций x с нормой $\|x\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$, L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных на всей оси функций x с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup |x(t)|$ и $p' : 1/p + 1/p' = 1$.

Обозначим через L_p^r ($r = 1, 2, \ldots, p \in [1; \infty]$) множество всех функций $x \in L_p$, имеющих $(r-1)$-ю локально абсолютно непрерывную производную

$x^{(r-1)}$ $(x^{(0)}=x)$ и таких, что $x^{(r)}\in L_p$, а через W_p^r $(r=1, 2, \ldots)$ — множество всех функций $x\in L_p^r$, у которых $\|x^{(r)}\|_p\leqslant 1$, через $L_{p,n}^r$ $(n, r=1, 2, \ldots$ $\ldots, p\in[1, \infty])$ — множество всех функций $x\in L_p^r$ таких, что $x(\nu\pi n^{-1})=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$.

В дальнейшем вместо $E(F, L_p, x)$ и $E(F, H, L_p, x)$ будем писать $E(F, x)_p$ и $E(F, H, x)_p$.

В пространстве L_p $(p\in[1, \infty])$ равенства (4) и (5) примут вид

$$E(F, H, x)_p=\sup_{E(H,f)_{p'}\leqslant 1}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,x(t)\,dt-\sup_{u\in F}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,u(t)\,dt\right), \tag{7}$$

если $F\subset L_p$ — выпуклое множество и

$$E(F, H, x)_p=\sup_{\substack{f\perp F\\ E(H,f)_{p'}\leqslant 1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,x(t)\,dt, \tag{8}$$

если F — подпространство из L_p.

3. Функцию $s_{n,r}(t)$ $(n=1, 2, \ldots, r=0, 1, \ldots)$ назовем сплайн-функцией порядка r дефекта 1 с $2n$ равноотстоящими узлами (или просто сплайном), если на каждом из интервалов $((\nu-1)\pi n^{-1}, \nu\pi n^{-1})$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$ она является алгебраическим многочленом степени $\leqslant r$ и $s_{n,r}\in L_\infty^r$. Через $S_{n,r}$ обозначим множество всех сплайнов $s_{n,r}(t)$ при фиксированных n и r, а через $S_{n,r}(a)$ — множество всех функций вида $s_{n,r}(t+a)$, где $s_{n,r}\in S_{n,r}$.

Пусть

$$t_{\nu,r}=\begin{cases}(2\nu-1)\,\pi/(2n) & (r=0, 2, 4, \ldots),\\ (\nu-1)\,\pi/n & (r=1, 3, 5, \ldots)\end{cases}\qquad(\nu=1, 2, \ldots, 2n).$$

Сплайн $s_{n,r}(x, \cdot)\in S_{n,r}$ назовем интерполяционным для функции x, если $s_{n,r}(x, t_{\nu,r})=x(t_{\nu,r})$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$.

Хорошо известно (см., например, [1, с. 287]), что для любой 2π-периодической конечной в точках $t_{\nu,r}$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$ функции $x(t)$ интерполяционный сплайн $s_{n,r}(x, t)$ существует и единственный.

Из эквивалентности условия $y^{(k)}\perp S_{n,k-1}$ условию $y(\nu\pi n^{-1})=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$ следует, что $y^{(k)}\perp S_{n,k-1}(t_{1,r})$ эквивалентно $y(t_{\nu,r})=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, 2n)$. Отсюда и из единственности интерполяционного сплайна $s_{n,r}(x)$ следует, что для всякой функции $x\in L_p^k$ $(k=1, 2, \ldots, r,\ p\in[1, \infty])$ единственным сплайном $s\in S_{n,r-k}$, удовлетворяющим условию $(x^{(k)}-s)\perp S_{n,k-1}(t_{1,r})$, является сплайн $s_{n,r}^{(k)}(x, t)$. Т. е. для всех $k=1, 2, \ldots, r$, $p\in[1, \infty]$ и любой функции $x\in L_p^k$ выполняется равенство

$$E(S_{n,r-k}, S_{n,k-1}(t_{1,r}), x^{(k)})_p=\|x^{(k)}-s_{n,r}^{(k)}(x)\|_p.$$

Из последнего равенства и из соотношения (8) вытекает, что

$$\|x^{(k)}-s_{n,r}^{(k)}(x)\|_p=\sup_{\substack{E(S_{n,k-1}(t_{1,r}),g)_{p'}\leqslant 1\\ g\perp S_{n,r-k}}}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,x^{(k)}(t)\,dt. \tag{9}$$

Так как множество $S_{n,r-k}$ содержит константы, то $g\perp\mathrm{const}$. Поэтому существует $(r-k+1)$-й периодический интеграл $f(t)$ от функции $g(t)$. При этом выберем аддитивную константу интегрирования так, чтобы $f(0)=0$. Тогда условие $g\in L_{p'}$, $g\perp S_{n,r-k}$ примет вид $f\in L_{p',n}^{r-k+1}$, и соотношение (9) перепишем в виде

$$\|x^{(k)}-s_{n,r}^{(k)}(x)\|_p=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\int_{-\pi}^{\pi} x^{(k)}(t)\,f^{(r-k+1)}(t)\,dt=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\int_{-\pi}^{\pi} x^{(r+1)}(t)\,f(t)\,dt=$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in L_{p'}^{r-k+1}, \varphi(t_{\nu,r})=0\ (\nu=1,2,\dots,2n) \\ E(S_{n,k-1}, \varphi^{(r-k+1)})_{p'} \leqslant 1}} \int_{-\pi}^{\pi} x^{(r+1)}(t - t_{1,r})\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= \sup_{E(S_{n,k-1}, \varphi^{(r-k+1)})_{p'} \leqslant 1} \int_{-\pi}^{\pi} x^{(r+1)}(t - t_{1,r})\,(\varphi(t) - s_{n,r}(\varphi, t))\, dt,$$

где $\mathfrak{M} = \{f : f \in L_{p',n}^{r-k+1},\ E(S_{n,k-1}(t_{1,r}), f^{(r-k+1)})_{p'} \leqslant 1\}$.

Переходя в обеих частях последнего соотношения к верхней грани по $x \in W_q^{r+1}$ и учитывая, что в силу теоремы двойственности

$$\sup_{\substack{\|x\|_q \leqslant 1 \\ x \perp \mathrm{const}}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, y(t)\, dt = \inf_{\lambda} \| y - \lambda \|_{q'} \overset{\mathrm{def}}{=} E_1(y)_{q'}, \tag{10}$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n, r = 1, 2, \dots, p,\ q \in [1, \infty]$ *и* $k = 1, 2, \dots, r$. *Тогда*

$$\sup_{x \in W_q^{r+1}} \| x^{(k)} - s_{n,r}^{(k)}(x) \|_p = \sup_{E(S_{n,k-1}, y^{(r-k+1)})_{p'} \leqslant 1} E_1(y - s_{n,r}(y))_{q'}.$$

4. Сплайн $s_{n,r}(x, h, t)$ будем называть интерполяционным в среднем для $x(t)$ сплайном, если

$$\int_{t_{\nu,r}-h/2}^{t_{\nu,r}+h/2} s_{n,r}(x, h, t)\, dt = \int_{t_{\nu,r}+h/2}^{t_{\nu,r}+h/2} x(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \dots, 2n).$$

Известно [3], что для каждой функции $x \in L_1$ интерполяционный в среднем сплайн $s_{n,r}(x, h)$ существует и единственный. Учитывая этот факт для $h < \pi/(2n)$, пишем

$$E(S_{n,r}, S_{n,0,h}, x)_p = \| x = s_{n,r}(x, h) \|_p,$$

где $S_{n,0,h}$ — $2n$-мерное подпространство функций тождественно постоянных на каждом из промежутков $[t_{\nu,r} - h/2,\ t_{\nu,r} + h/2]$ $(\nu = 1, 2, \dots, 2n)$ и равных нулю на множестве $[t_{1,r}, t_{1,r} + 2\pi] \setminus \bigcup_{\nu=1}^{2n} [t_{\nu,r} - h/2,\ t_{\nu,r} + h/2]$. Отсюда и из равенства (8) получаем

$$\| x - s_{n,r}(x, h) \|_p = \sup_{\substack{E(S_{n,0,h}, g)_{p'} \leqslant 1 \\ g \perp S_{n,r}}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, g(t)\, dt.$$

Обозначив через $f(t)$ $(r+1)$-й периодический интеграл от функции $g(t)$ такой, что $f(0) = 0$, получаем

$$\| x - s_{n,r}(x, h) \|_p = \sup_{f \in \mathfrak{R}_{p',n,h}^{r+1}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, f^{(r+1)}(t)\, dt = \sup_{f \in \mathfrak{R}_{p',n,h}^{r+1}} \int_{-\pi}^{\pi} x^{(r+1)}(t)\, f^{(r+1)}(t)\, dt,$$

где $\mathfrak{R}_{p,n,h}^{r} = \{f : f \in L_{p,n}^{r},\ E(S_{n,0,h}, f^{(r)})_p \leqslant 1\}$.

Переходя к верхней грани по $x \in W_q^{r+1}$ и учитывая равенство (10), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *При всех* $n,\ r = 1, 2, \dots, R \in (0, \pi/(2n))$ *и* $p, q \in [1, \infty]$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{x \in W_q^{r+1}} \| x - s_{n,r}(x, h) \|_p = \sup_{f \in \mathfrak{R}_{p',n,h}^{r+1}} E_1(f)_{q'}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
2. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.— М.: Наука, 1971.— 351 с.
3. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны.— Труды Мат. ин-та АН СССР, 1975, 138, с. 118—174.

Днепродзержинский
индустриальный институт

Поступила в редакцию 20.III 1978 г.,
после переработки — 29.V 1979 г.