УДК 513.6

Г. И. Литвак

О невырожденности спаривания Тэйта в когомологиях Галуа конечных модулей над общими локальными полями характеристики нуль

В работе [1] высказано предположение о том, что для общих локальных полей имеет место аналог теоремы двойственности Тэйта—Шатца в когомологиях Галуа конечных модулей над локальными полями [2, 3] типа двусторонней невырожденности.

В заметке [4] это предположение подтверждено в случае, если основное поле содержит все корни из единицы степени p, где $p>0$ — характеристика поля вычетов, а модуль тривиален. В настоящей заметке предположение доказывается для произвольного основного поля и произвольного конечного модуля.

Предложение. *Пусть k — общее локальное поле,* $\operatorname{char} k=0$, *не обязательно содержащее корни степени p из единицы, $\bar{k}$ — его квазиконечное поле вычетов,* $\operatorname{char}\bar{k}=p>0$, *$k_s$ — сепарабельное замыкание поля k, $G=\operatorname{Gal}(k_s/k)$ — группа Галуа расширения k_s/k, M — конечный G-модуль порядка p^n, $\widehat{M}=\operatorname{Hom}(M, k_s^*)$. Тогда спаривание Тэйта*

$$H^{2-i}(k, M)\times H^i(k, \widehat{M})\to H^2(k, k_s^*),\qquad i=0, 1, 2, \tag{1}$$

порожденное спариванием $M\times\widehat{M}\to k_s^*$, двусторонне невырожденно.

Доказательство. Пусть сначала $M=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Тогда (1) можно записать в виде

$$H^{2-i}(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\times H^i(k, \mu_p)\to H^2(k, k_s^*),\qquad i=0, 1, 2,$$

где μ_p — группа корней из единицы степени p.

Пусть $i=0$. Тогда $H^0(k, \mu_p)=0$ и нужно лишь показать, что $H^2(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})=0$. Воспользуемся рассуждениями, аналогичными приведенным в работе [5].

Пусть $l=k(\zeta)$, где $\zeta^p=1$. Известно, что $H^2(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\simeq H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{l/k}$, поэтому достаточно показать, что $H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{l/k}=0$. Рассмотрим точную последовательность l-модулей $0\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\xrightarrow{\varphi}k_s^*\xrightarrow{p}k_s^*\to 1$, где $\varphi(n)=\zeta_p^n$, $n\in\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, ζ_p — нетривиальный корень из единицы степени p, а p — гомоморфизм возведения в степень p. Соответствующая когомологическая последовательность показывает, что $H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})\xrightarrow{\varphi^*}H^2(l, k_s^*)$ — мономорфизм.

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^2(l, k_s^*) \\ \downarrow{s^*} & & \downarrow{s^*} \\ H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^2(l, k_s^*), \end{array}$$

где $s \in \mathrm{Gal}(l/k)$, дает равенство $s^*\varphi^* = (\varphi^* s^*)^{a(s)}$; здесь $a(s) \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $s(\zeta_p) = \zeta_p^{a(s)}$. Следовательно, $H^2(l, k_s^*)^{l/k} = H^2(l, k_s^*)$.

Пусть $x \in H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, тогда $s^*\varphi^*(x) = \zeta_p^{a(s)s(x)}$, $\varphi^* s^*(x) = \zeta_p^{s(x)}$. Пусть $x \in H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{l/k}$, тогда $s^*(x) = x$. Поэтому $s^*\varphi^*(x) = \varphi^*(x)$ и $\varphi^*(x) = [\varphi^*(x)]^{a(s)}$ для любого s. Но $[\varphi^*(x)]^p = 1$, а поскольку $(p, a(s)) = 1$, то равенство возможно лишь в случае $\varphi^*(x) = 1$. В силу инъективности φ^* получаем, что $x = 0$, т. е. $H^2(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{l/k} = 0$. Пусть $i = 1$. Снова воспользуемся изоморфизмами

$$H^1(k, \mu_p) = H^1(l, \mu_p)^{l/k}, \quad H^1(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = H^1(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{l/k}.$$

Поскольку спаривание Тэйта для поля l в силу работы [4] невырожденно, то для любого $x \in H^1(k, \mu_p)$ существует $\tilde{y} \in H^1(l, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ такой, что $x\tilde{y} \neq 1$. Положим $y = N_{l/k}(\tilde{y})$. Пусть $(x, y)_v$—символ Гильберта. Тогда $y = H^1(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, а так как $(x, N_{l/k}(\tilde{y}))_v = N_{l/k}(x, \tilde{y})_v = (x, y)_v^{[l:k]} \neq 1$, ибо $(p, [l:k]) = 1$, то y — искомый элемент. Ясно, что рассуждения симметричны для x и y.

Пусть $i = 2$. В этом случае применимо рассуждение Пуату [6]. Таким образом, случай $M = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ доказан. Если $M = \mu_p$, то, поскольку $\widehat{M} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, все сводится к уже доказанному случаю.

Отвинчивание, приведенное в работе [4], доказывает двойственность для любого тривиального модуля M порядка p^n. Однако известно (см., например, [6]), что существует такая открытая подгруппа $H \subset G$, что ее индекс $(G : H)$ взаимно прост с p и M, как H-модуль, имеет композиционный ряд с циклическими H-тривиальными факторами. Так как для тривиальных модулей все доказано, то, применяя снова отвинчивание, получаем двойственность Тэйта для любого H-модуля M порядка p^n.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^i(H, M) & \xrightarrow{c^i_H(M)} & [H^{2-i}(H, \widehat{M})]^\wedge \\ \mathrm{cor}\downarrow \uparrow\mathrm{res} & & \widehat{\mathrm{cor}}\uparrow \downarrow\widehat{\mathrm{res}} \\ H^i(G, M) & \xrightarrow{c^i_G(M)} & [H^{2-i}(G, \widehat{M})]^\wedge, \end{array}$$

где $\widehat{\Gamma}$ — группа характеров группы Γ, а $c^i_\Gamma(M)$ — гомоморфизм, реализующий двойственность.

Согласно доказанному $c^i_H(M)$ — всюду плотный мономорфизм. Так как $(G:H)$ и p взаимно просты, а M — модуль порядка p^n, то: а) res — мономорфизм; б) группа $H^i(G, M)$ $(G:H)$-делима, а поскольку это p-группа, то гомоморфизм умножения на $(G:H)$ — изоморфизм. Согласно формуле $\mathrm{cor} \cdot \mathrm{res} = (G:H)$ гомоморфизм cor — эпиморфизм. Заметим еще, что так как функтор $\wedge$ точен, то ввиду а) и б) $\widehat{\mathrm{res}}$ — эпиморфизм, а $\widehat{\mathrm{cor}}$ — мономорфизм. Поскольку $c^i_H(M)\,\mathrm{res} = \widehat{\mathrm{cor}} \cdot c^i_G(M)$, то $c^i_G(M)$ — мономорфизм, а поскольку $\widehat{\mathrm{res}} \cdot c^i_H(M) = c^i_G(M) \cdot \mathrm{cor}$, $c^i_G(M)$ всюду плотен. Доказательство окончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введенский О. Н. О локальных полях классов эллиптических кривых.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 1, с. 20—88.
2. Shatz S. Cohomology of arminian group shemes over local Fields.— Ann. Math., 1964, **72**, p. 411—449.
3. Tate I. Duality theorems in Galois cohomology over number fields.— Proc. Congress. Stockholm, 1962, p. 282—295.
4. Введенский О. Н., Крупяк И. С. Замечание о невырожденности спаривания Тэйта в когомологиях Галуа конечных модулей над общими локальными полями.—Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 4, с. 523—525.
5. Кох X. Теория Галуа p-расширений.— М.: Мир. 1973.— 199 с.
6. Poitou G. Cohomologie Galoisienne des modules finis. Paris, Dunod, 1967.

Коммунарск

Поступила в редакцию
27.III 1978 г.