УДК 517.917

Г. А. Лось

Достаточные условия устойчивости решений линейной дифференциальной системы второго порядка

Изучению устойчивости решений линейной дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

посвящены многочисленные исследования (например, [1—4]), однако даже в случае периодической матрицы коэффициентов, не говоря уже о произвольной, появление новых, эффективных критериев устойчивости — значительный вклад в изучение свойств решений системы (1).

Рассмотрим систему (1) с дифференцируемой на $[t_0, +\infty)$ матрицей коэффициентов.

С помощью подстановки

$$y_1 = Y_1 \exp \int_{t_0}^{t} P_{11} dt, \; y_2 = Y_2 \exp \int_{t_0}^{t} P_{22} dt \tag{2}$$

систему (1) преобразуем к виду

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \exp \int_{t_0}^{t} (P_{22} - P_{11})\, dt \\ P_{21} \exp \int_{t_0}^{t} (P_{11} - P_{22})\, dt & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

По отношению к системе (3) можно вести речь лишь об устойчивости или неустойчивости ее решений (асимптотической устойчивости здесь быть не может, ибо след матрицы ее коэффициентов равен нулю).

Очевидны следующие утверждения.

1. Если решения системы уравнений (3) устойчивы и интегралы $\int_{t_0}^{+\infty} P_{11} dt$, $\int_{t_0}^{+\infty} P_{22} dt$ либо ограничены, либо один из них ограничен, а второй равен $-\infty$, то решения системы уравнений (1) тоже устойчивы.

2. Если решения системы уравнений (3) устойчивы, а $\int_{t_0}^{+\infty} P_{11} dt = -\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} P_{22} dt = -\infty$, то решения системы уравнений (1) асимптотически устойчивы.

3. Если решения системы уравнений (3) устойчивы, а хотя бы один из интегралов $\int_{t_0}^{+\infty} P_{11} dt$, $\int_{t_0}^{+\infty} P_{22} dt$ равен $+\infty$, то решения системы уравнений (1) неустойчивы.

Таким образом, решение задачи об устойчивости системы (1) сводится к решению этой же задачи для системы (3). Запишем ее в форме

$$y_1' = a(t)\, y_2, \; y_2' = b(t)\, y_1. \tag{4}$$

Собственные значения $A_{1,2}$ матрицы $\begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}$ имеют вид $A_{1,2} = \pm \sqrt{a(t)\, b(t)}$. Считая, что $ab \neq 0$, a/b и b/a — ограничены на $[t_0, +\infty)$, матрицу Φ собственных векторов (строки — собственные векторы) возьмем в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} P^{-s+\frac{1}{2}} & P^{-s} \\ -P^{-s+\frac{1}{2}} & P^{-s} \end{vmatrix}, \quad P = \frac{b(t)}{a(t)}.$$

Тогда

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P^{s-\frac{1}{2}} & -P^{s-\frac{1}{2}} \\ P^{s} & P^{s} \end{pmatrix}.$$

Общее решение вспомогательной системы [4]

$$\begin{aligned} \bar{y}_1' &= \left(s - \frac{1}{2}\right) q(t)\,\bar{y}_1 + a(t)\,\bar{y}_2, \\ \bar{y}_2' &= b(t)\,\bar{y}_1 + sq(t)\,\bar{y}_2,\ q(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где s — некоторое рациональное число, представляется так ($t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= P^{s-\frac{1}{2}}\left(C_1 \operatorname{ch} \dot{I}_1 + C_2 \operatorname{sh} \dot{I}_1\right) \\ \bar{y}_2 &= P^{s}\left(C_1 \operatorname{sh} \dot{I}_1 + C_2 \operatorname{ch} \dot{I}_1\right),\ \dot{I}_1 = \int_0^t \sqrt{ab}\,dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Нормированная фундаментальная система решений будет такой:

$$\bar{\bar{Y}} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{y}}_{11} & \bar{\bar{y}}_{12} \\ \bar{\bar{y}}_{21} & \bar{\bar{y}}_{22} \end{pmatrix} = \left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{s} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{P(0)}{P(t)}} \operatorname{ch} \dot{I}_1 & \frac{1}{\sqrt{P(t)}} \operatorname{sh} \dot{I}_1 \\ \sqrt{P(0)} \operatorname{sh} \dot{I}_1 & \operatorname{ch} \dot{I}_1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\det \bar{\bar{Y}} = \left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{2s} \left(\frac{P(0)}{P(t)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эта формула верна и при $ab < 0$, так как в этом случае $\operatorname{ch} \dot{I}_1 = \cos \dot{I}$, $\operatorname{sh} \dot{I}_1 = i \sin \dot{I}$, где

$$i^2 = -1,\ \dot{I} = \int_0^t \sqrt{-ab} \cdot dt.$$

Изучение (5), (6), (7) показывает, что наиболее эффективным будет критерий устойчивости в том случае, если $s = \frac{1}{4}$, хотя в этом случае система (5) не будет наиболее простой. Однако при $s = \frac{1}{4}$ $\det \bar{\bar{Y}} = 1$, что весьма выгодно для дальнейших исследований.

Выбор матрицы Φ в других формах также возможен. Если, например, взять

$$\Phi = \begin{pmatrix} b^{r} & b^{r}\sqrt{\frac{a}{b}} \\ -a^{s}\sqrt{\frac{b}{a}} & a^{s} \end{pmatrix},$$

то при $s = \frac{1}{2}$ и $r = \frac{1}{2}$ вспомогательная система будет более простой, чем при $s=0$ и $r=0$, однако критерий устойчивости получается эффективнее во втором случае. Но нормированные фундаментальные системы решений оказываются гораздо более сложными, чем в случае матрицы Φ, взятой первоначально.

Итак, при $s = \frac{1}{4}$ имеем

$$\bar{y}_1' = -\frac{1}{4} q(t)\, \bar{y}_1 + a(t)\, \bar{y}_2, \quad \bar{y}_2' = b(t)\, \bar{y}_1 + \frac{1}{4} q(t)\, \bar{y}_2. \tag{8}$$

Запишем систему (4) так:

$$y_1' = -\frac{1}{4} q(t)\, y_1 + a(t)\, y_2 + \frac{1}{4} \mu q(t)\, y_1, \tag{9}$$

$$y_2' = b(t)\, y_1 + \frac{1}{4} q(t)\, y_2 - \frac{1}{4} \mu q(t)\, y_2, \ \mu = 1.$$

Представляя решения y_1 и y_2 в виде рядов по степеням

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_{1,k}, \ y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_{2,k} \tag{10}$$

и подставив (10) в (9), а потом сравнив коэффициенты при одинаковых степенях μ, придем к рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$y_{1,k}' = -\frac{1}{4} q(t)\, y_{1,k} + a(t)\, y_{2,k} + \frac{1}{4} q(t)\, y_{1,k-1}, \tag{11}$$

$$y_{2,k}' = b(t)\, y_{1,k} + \frac{1}{4} q(t)\, y_{2,k} - \frac{1}{4} q(t)\, y_{2,k-1} \ (k=0, 1, 2, \ldots;\ y_{1,-1}=0,\ y_{2,-1}=0).$$

Считая здесь и далее $ab \leqslant 0$ и $P(t)$ ограниченной, отличной от нуля величиной, при $k=0$ из (11) находим

$$\begin{aligned} y_{101} &= \left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos \dot{I}(t), \quad y_{201} = -\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{-P(0)} \sin \dot{I}(t), \\ y_{102} &= \left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{-P(0)}} \sin \dot{I}(t), \quad y_{202} = \left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{4}} \cos \dot{I}(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Первый, второй и третий индексы обозначают соответственно номер функции в решении, номер приближения, номер решения. По методу вариации произвольной постоянной находим

$$y_{1,k} = -\frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) \left[y_{101}(t) \begin{vmatrix} -y_{1,k-1}(\tau) & y_{102}(\tau) \\ y_{2,k-1}(\tau) & y_{202}(\tau) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + y_{102}(t) \begin{vmatrix} y_{101}(\tau) & -y_{1,k-1}(\tau) \\ y_{201}(\tau) & y_{2,k-1}(\tau) \end{vmatrix} \right] d\tau,$$

$$y_{2,k} = -\frac{1}{4}\int_0^t q(\tau)\left[y_{201}(t)\begin{vmatrix} -y_{1,k-1}(\tau) & y_{102}(\tau) \\ y_{2,k-1}(\tau) & y_{202}(\tau)\end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + y_{202}(t)\begin{vmatrix} y_{101}(\tau) - y_{1,k-1}(\tau) \\ y_{201}(\tau)\, y_{2,k-1}(\tau)\end{vmatrix}\right] d\tau (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда последовательно получим

$$y_{1,2k} = \frac{1}{4^{2k}}\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{-P(0)}}\int_0^t q(\tau)\, d\tau \int_0^\tau q(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{2k-2}} q(\tau_{2k-1}) \sin \alpha_{2k-1} d\tau_{2k-1},$$

$$y_{2,2k} = \frac{1}{4^{2k}}\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{4}} \int_0^t q(\tau)\, d\tau \int_0^\tau q(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{2k-2}} q(\tau_{2k-1}) \cos \alpha_{2k-1} d\tau_{2k-1}$$

$$y_{1,2k+1} = \frac{1}{4^{2k+1}}\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{-P(0)}}\int_0^t q(\tau)\, d\tau \int_0^\tau q(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots \tag{13}$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{2k-1}} q(\tau_{2k}) \sin \alpha_{2k} d\tau_{2k},$$

$$y_{2,2k+1} = -\frac{1}{4^{2k+1}}\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{4}} \int_0^t q(\tau)\, d\tau \int_0^\tau q(\tau_1)\, d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{2k-1}} q(\tau_{2k}) \cos \alpha_{2k} d\tau_{2k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\alpha_{2k-1} = 2\dot{I}(\tau_{2k-1}) - 2\dot{I}(\tau_{2k-2}) + \ldots - 2\dot{I}(\tau) + \dot{I}(t)$, $\alpha_{2k} = 2\dot{I}(\tau_{2k}) - -2\dot{I}(\tau_{2k-1}) + \ldots + 2\dot{I}(\tau) - \dot{I}(t)$. Исходя из (13), легко доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (10) и их производных. Действительно,

$$|y_{is}| \leqslant \frac{L}{s!4^s}\left[\int_0^t |q(\tau)|\, dr\right]^s, \quad L = \max\left\{\left|\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{-P(0)}}\right|,\right.$$

$$\left.\left|\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{4}}\right|\right\}.$$

Но тогда

$$\left|\sum_{s=0}^{\infty} y_{is}\right| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} |y_{is}| \leqslant L \exp\left(\frac{1}{4}\int_0^t |q(\tau)|\, d\tau\right), \tag{14}$$

т. е. ряды (10) абсолютно и равномерно сходятся в области $[0, +\infty)$, если L ограничено, $\int_0^t |q(\tau)|\, d\tau$ сходится при любом конечном t.

Если же дополнительно $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t |q(\tau)|\,d\tau < \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} L$ ограничен, то суммы этих рядов будут ограниченными и при $t\to\infty$.

Но ограниченность L при всех $t\geqslant 0$ следует из ограниченности и необращения в нуль или бесконечность функции $P(t)$.

Аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{s=0}^{\infty} y'_{i_s}$ в той же области, а также ограниченность их суммы при $t\to\infty$ при тех же ограничениях.

В силу того, что для линейных однородных дифференциальных систем ограниченность их решений эквивалентна устойчивости решений по Ляпунову, имеет место такая теорема.

Теорема 1. *Если коэффициенты* $a(t)$ *и* $b(t)$ *системы* (4) — *хотя бы один раз дифференцируемые на* $[0, +\infty)$ *функции переменной* t *и* $b(t)/a(t)$ *для всех* $t\geqslant 0$ *(включая и* $t\to+\infty$*) отлично от нуля и бесконечности, то тривиальное решение системы уравнений* (4) *устойчиво, если*

$$\sup_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t \left|\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)'\Big/\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)\right| dt < \infty, \quad ab\leqslant 0.$$

Разумеется, что вместо начального условия $t=0$ можно взять любое значение $t=t_0$.

Пример. Система дифференциальных уравнений

$$y_1' = f(t)(\alpha t^m + \beta)\, y_2, \qquad y_2' = f(t)(\gamma t^m + \delta)\, y_1,$$

где $f(t)$ — хотя бы один раз дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция, устойчива, если $\alpha\gamma < 0$, $m > 0$, так как все условия сформулированной теоремы выполняются для $t\geqslant t_0$, где t_0 — достаточно большое фиксированное число, что легко проверить. То же относится, например, и к системе

$$y_1' = m\sin t\,(a + bt^{-\alpha})\, y_2,$$

$$y_2' = n\sin t y_1,\ \ \alpha > 0,\ \ mna < 0,\ \ a\neq 0.$$

Изложенная теорема эффективно применяется и к периодическим системам. Пусть, например, $a(t) = a(t+\pi)$, $b(t) = b(t+\pi)$, $ab < 0$. Для решения задачи устойчивости системы (4) воспользуемся условием устойчивости [1]:

$$-2\leqslant \operatorname{sp} Y(\pi)\leqslant 2, \tag{15}$$

где $Y(\pi)$ — фундаментальная матрица системы (4).

Учитывая, что

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{|P(0)|}} \pm \cos x\right| \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{|P(0)|}},$$

из формул (12) — (15) получаем

$$\operatorname{sp} Y(\pi) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} 2\cos\int\limits_0^{\pi}\sqrt{-a(t)\,b(t)}\,dt \underset{(-)}{+} \sqrt{1 + \frac{1}{|P(0)|}}\left(\exp\frac{K}{4} - 1\right) = \begin{cases} u \\ v\end{cases},$$

где

$$K = \int\limits_0^{\pi} |q(t)|\,dt = 2\ln\frac{P(i_1)\,P(i_2)\ldots P(i_n)}{P(j_1)\,P(j_2)\ldots P(j_n)},$$

i_s, j_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — соответственно точки максимумов и минимумов функции $P(t)$ на интервале $[0, \pi)$.

Отсюда следует теорема.

Теорема 2. *Для π-периодических, хотя бы один раз дифференцируемых на $[0, \pi]$ $a(t)$ и $b(t)$, $a(t)\,b(t) \leqslant 0$, тривиальное решение системы* (4) *устойчиво, если $u \leqslant 2$, $v \geqslant -2$, $a(t)/b(t)$, $b(t)/a(t)$ ограничены и отличны от нуля.*

Теорема 2 дает возможность строить зоны устойчивости при любых значениях параметров, входящих в $a(t)$ и $b(t)$.

Пример. Найти зоны устойчивости системы уравнений

$$y_1' = -\sin 2t \cdot y_2, \qquad y_2' = (m + n\cos 2t)\sin 2t \cdot y_1, \quad m > n > 0.$$

Решение. В данном примере $a(t)$ и $b(t)$ имеют общие нули одного и того же порядка. Поэтому a/b и b/a ограничены. Фундаментальную систему решений (12) можно считать ограниченной, если $P(0)$ считать равным $\lim\limits_{t\to 0} P(t)$. Система уравнений (9) имеет ограниченные коэффициенты, так как $q(t) = (-2n\sin 2t)/(m + n\cos 2t)$.

Собственные значения матрицы коэффициентов сливаются, так как $A_{1,2} = \pm i\sqrt{\sin^2 2t\,(m + n\cos 2t)}$, но матрица Φ собственных векторов невырожденна. Поэтому теорема 2 применима. Имеем

$$\int_0^{\pi}\left|\left(\ln\frac{b}{a}\right)'\right| dt = 2\ln\frac{m+n}{m-n}, \qquad F = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 2t\,(m + n\cos 2t)}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3n}\left(\sqrt{(m+n)^3} - \sqrt{(m-n)^3}\right),$$

$$\operatorname{sp} Y(\pi) \leqslant 2\cos F + u_1, \qquad \operatorname{sp} Y(\pi) \geqslant 2\cos F - u_1,$$

где $u_1 = \sqrt{1 + 1/(m+n)}\left(\sqrt{(m+n)/(m-n)} - 1\right)$, причем $u_1 \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому неравенства $2\cos F + u_1 \leqslant 2$, $2\cos F - u_1 \geqslant -2$ дадут зоны устойчивости в плоскости параметров m и n. Ширина этих зон при $n = 0$ определяется неравенствами $\pi^2 k^2 \leqslant m \leqslant \pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а при $n > 0$ зоны устойчивости сужаются.

Пример. Найти зоны асимптотической устойчивости уравнения Хилла с демпфированием

$$y'' + 2hy' + (\omega^2 + \mu Q(t))\,y_1 = 0, \int_0^{\pi} Q(t)\,dt = 0, \quad Q(t) = Q(t + \pi).$$

Решение. Подстановкой $y = x\exp(-ht)$ данное уравнение приведем к виду

$$x'' + (\omega^2 - h^2 + \mu Q(t))\,x = 0, \qquad \omega^2 - h^2 + \mu Q(t) > 0.$$

Запишем его как систему двух уравнений

$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = -(\omega^2 - h^2 + \mu Q(t))\,x_1.$$

Для этой системы $A_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2 + \mu Q(t)}$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{-b(t)} & 1/\sqrt[4]{-b(t)} \\ -\sqrt[4]{-b(t)} & 1/\sqrt[4]{-b(t)} \end{pmatrix}, \qquad q(t) = \frac{\mu Q'(t)}{b(t)},$$

$$\int_0^{\pi} |q(t)|\,dt = 2\ln\frac{b(i_1)\,b(i_2)\ldots b(i_n)}{b(j_1)\,b(j_2)\ldots b(j_n)},$$

где через $b(t)$ обозначено $\omega^2 - h^2 + \mu Q(t)$, i_k, j_k — точки максимумов и минимумов функции $b(t)$ на $[0, \pi)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\operatorname{sp} x(\pi) \leqslant 2 \cos \int_0^\pi \sqrt{b(t)}\, dt + u_1 = u, \qquad \operatorname{sp} x(\pi) \geqslant 2 \cos \int_0^\pi \sqrt{b(t)}\, dt - u_1 = v,$$

где

$$u_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 - h^2 + \mu Q(\pi)}} \left(\sqrt{\frac{\prod_{s=1}^{n} b(i_s)}{\prod_{s=1}^{n} b(j_s)}} - 1 \right),$$

причем $u_1 \to 0$ при $\omega^2 - h^2 \to \infty$. Зоны устойчивости системы относительно x_1, x_2 определятся неравенствами $u \leqslant 2$, $v \geqslant -2$ в плоскости параметров $\omega^2 - h^2$ и μ.

Для исходного уравнения эти зоны будут зонами асимптотической устойчивости, так как $y = x \exp(-ht)$.

К рассматриваемому уравнению приводят многочисленные задачи механики. В частности, к нему приводит исследование устойчивости поперечных колебаний стержня, нагруженного продольными силами. При этом величины $\omega^2 - h^2$ и μ очень велики, что не позволяет воспользоваться известными в литературе таблицами для решения задачи устойчивости даже в случае, когда $Q(t) = \cos 2t$.

Поэтому полученный в настоящей статье критерий очень полезен, так как дает возможность получать зоны устойчивости для $\mu < \frac{3}{5}(\omega^2 - h^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 718 с.
2. Гаврилов Н. И. Методы теории дифференциальных уравнений.— М.: Высшая школа, 1962.— 312 с.
3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1964.— 477 с.
4. Лось Г. А. Об устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости линейной дифференциальной системы.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 1, с. 106—110.

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию 2.XI 1978 г.;
после переработки — 24.IX 1979 г.