УДК 517.948:513.77.519.4

В. Г. Самойленко

Об эллиптических операторах второго порядка с бесконечным числом переменных

В этой заметке изучается дифференциальный оператор с бесконечным числом переменных; доказывается, что при некоторых условиях на коэффициенты и сингулярном потенциале оператор будет самосопряженным. Первая часть статьи — непосредственное продолжение работ [1, 2]. Кроме того, рассматривается задача изучения спектра, достаточно хорошо изученная в случае конечного числа переменных [3, 4] и мало — в ситуации с бесконечным числом переменных [5].

Интерес к рассмотрению подобного класса операторов возникает в связи с потребностями квантовой теории поля.

1. Пусть $(p_k(t))_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность весов таких, что $0 < p_k(t) \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\int\limits_{\mathbf{R}^1} p_k(t)\, dt = 1$. Введем на $\mathbf{R}^{\infty} = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \ldots$ меру $d\rho(x) = (p_1(x_1)\, dx_1) \otimes (p_2(x_2)\, dx_2) \otimes \ldots$ $(\mathbf{R}^{\infty} \ni x = (x_k)_{k=1}^{\infty},\ x_k \in \mathbf{R}^1)$ и рассмотрим пространство $L_2(\mathbf{R}^{\infty}, d\rho(x))$. Положим $(D_n u)(x) = p_n^{-1/2}(x_n) \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p_n^{1/2}(x_n) \times$ $\times u(x)$ и рассмотрим дифференциальное выражение

$$(\mathscr{L}u)(x) = -\sum_{j,k=1}^{\infty} (D_j a_{jk}(x)(D_k u))(x) + q(x)u(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^{\infty}),$$

где $q(\cdot) \in (L_{2\,\mathrm{loc}},\ (\mathbf{R}^m)) \otimes (L_2(\mathbf{R}^{\infty}, (p_{m+1}(x_{m+1})\, dx_{m+1}) \otimes \ldots))$ (m — фиксировано и $m = 1, 2, \ldots$) — вещественнозначный потенциал. Предполагаем, что матрица $A = (a_{j,k})_{jk=1}^{\infty}$ имеет блочно диагональный вид, а коэффициенты $a_{jk} = a_{j,k,\text{ц}}(x_1, \ldots, x_p)$ $(p = \max(j, k, N)$; N — фиксировано) и

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}(x)\, \varepsilon_j \bar{\varepsilon}_k \leqslant c(|x^{(n)}|) \sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \qquad (\varepsilon > 0) \tag{1}$$

$((x^{(n)}) = (x_1, \ldots, x_n)$; $|\cdot|$ — евклидова метрика в $\mathbf{R}^n$ для любой) финитной последовательности $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ $(\varepsilon_j \in \mathbf{C}^1,\ j = 1, 2, \ldots)$; неубывающая функция $c(t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{\infty} c^{-1}(t)\, dt = \infty$. a_{jk} как и их производные $\dfrac{\partial a_{jk}}{\partial x_j}$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$ локально ограничены по первым n переменным (n — фиксировано) и ограничены по остальным. Допустим, что функция $p(x) = -(\mathscr{L}_0 1)(x) \in L_2(\mathbf{R}^{\infty}, d\rho(x))$, где $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}$ при $q \equiv 0$, тогда в пространстве L_2 определен эрмитовый оператор $C_{\text{ц},l,0}^{\infty}(\mathbf{R}^{\infty}) \ni u \to Au = (\mathscr{L}u)(x)$ $(l \geqslant \max(m, n)$; $C_{\text{ц},l,0}^{\infty}(\mathbf{R}^{\infty})$ — линейная оболочка цилиндрических функций $u(x) = u_{\text{ц}}(x_1, \ldots, x_p)$, где $u_{\text{ц}} \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^p)$, $p = p(u) \geqslant l$).

Согласно лемме 1 [6] найдется $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k > 0;\ \sum\limits_{k=l}^{\infty} \alpha_k < \infty\right)$ такая, что множество $\left\{x \in \mathbf{R}^{\infty} \mid \langle x \rangle^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k^2 < \infty\right\}$ будет иметь полную $d\rho$-меру. Ниже будем говорить, что функция $f(x)$ $(x \in \mathbf{R}^{\infty})$ локально полуограничена снизу (сверху), если для каждого $r > 0$ $\inf\limits_{x \in G_r} f(x) > -\infty$ $(\sup\limits_{x \in G_r} f(x) < \infty)$, где $G_r = \{x \in \mathbf{R}^{\infty} \mid \langle x \rangle \leqslant r\}$. Введем обозначение $\alpha(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (D_j 1)^2$, $\beta(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |(D_j 1)'_{x_j}|$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $(p_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$ такая, что функции $\dfrac{d(D_n 1)}{dx_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ полуограничены снизу и $\sum\limits_n \inf\limits_{x_n} \dfrac{d}{dx_n}(D_n 1) > -\infty$. Тогда, если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ локально ограничены сверху, а a_{jk} такие, что при каждом $r > 0$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in G_r} \left| \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j} \right| \right)^2, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x \in G_r} |a_{jk}| \sqrt{\alpha_k} \right)^2 < \infty, \tag{2}$$

то оператор A существенно самосопряжен, если потенциал $q(x)$ локально полуограничен снизу и выполняется одно из условий: а) *оператор A полуограничен снизу;* б) *существует невозрастающая функция* $[0, \infty) \ni s \to Q(s) \in (-\infty, 0]$ *такая, что* $q(x) \geqslant Q(\langle x \rangle)$ *и* $|Q(t)|_{t\to\infty} = O(t^2)$.

Доказательство теоремы проведем следующим образом. Сначала, как и в теореме 1 [2, § 2, п. 3], докажем самосопряженность оператора A_0, построенного по $\mathcal{L}$ при $q = p$. Затем, используя локальную ограниченность сверху функции $p(x)$, имеющей место в силу первого из условий (2) и условий на $\alpha(x)$, $\beta(x)$, подобно [2] покажем, что операторы A_n, построенные по $\mathcal{L}$ при $q = a_n = p + q_n - p_n (q_n - p_n = q - p$ при $x \in G_n$ и 0 при $x \overline{\in} G_n)$ самосопряжены. Наконец, используя условия (2) и теорему 6.5 из [7, гл. 2] установим условие а). Случай б) докажем с помощью теоремы 6.4 из [7, гл. 2] подобно тому, как в теореме 6 [2, § 1].

Замечания. 1. В случае гауссовских весов $p_n(x_n) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi}}\, e^{-\varepsilon_n x_n^2}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty;\ \varepsilon_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots\right)$ все условия на $p_n(x_n)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ выполнены, если в качестве α_k взять $\eta_k \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$, $\eta_k \geqslant \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

2. Пусть $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера), тогда условия (2) выполнены. Кроме того, теорема справедлива при менее жестких условиях на веса $p_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а именно: функция $p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (D_k^2 1)$ должна быть полуограничена снизу и локально ограничена сверху.

3. Условия на веса $p_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ могут быть ослаблены, но в связи с громоздкостью описания конструкции не приводим их.

2. Перейдем к рассмотрению спектра оператора A, когда $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$. Пусть $\sigma(C)$, $\sigma_{\text{cont}}(C)$, $\sigma_{\text{disc}}(C)$, $\sigma_{\text{ess}}(C)$ означает соответственно непрерывный, дискретный и существенный спектры оператора C (определения см. в [8], тогда согласно [7] $\sigma(A_0) = \sigma_{\text{cont}}(A_0) = [0, \infty)$, где $A_0 = A$ при $q \equiv 0$.

Два следующих утверждения — специфические для ситуации с бесконечным числом переменных.

Утверждение 1. *Среди потенциалов $q(x)$ $(x \in \mathbf{R}^\infty)$, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{\langle x \rangle \to \infty} q(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^\infty), \tag{3}$$

найдутся такие, что при возмущении ими оператора A_0 равенство $\sigma_{\text{ess}}(A_0) = \sigma_{\text{ess}}(A)$ не выполняется.

Доказательство основано на технике квадратичных форм, восходящей к К. Фридрихсу и развитой М. Ш. Бирманом [4].

Отметим, что в конечномерной ситуации условие типа (3) достаточно для сохранения существенного спектра (см. [3, 4]).

Утверждение 2. *Пусть* $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x^{(n)})$ $(x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$. *Если для каждого n* $|q_n(x^{(n)})| \leqslant M_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, *то* $\sigma(A) = [\eta, \infty)$, *где* η — *нижняя грань оператора A.*

Для доказательства используем теорему VIII. 23 [8]. Оно основано на равномерной резольвентной сходимости операторов A_n (строящихся по $\mathcal{L}$, когда $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$) к оператору A и структуре их спектра.

Следующая теорема обобщает на случай $\mathbf{R}^\infty$ соответствующие теоремы, справедливые на $\mathbf{R}^N$ (см. [3]). Обозначим через $Q^{(n)}$ куб в $\mathbf{R}^n$, а $|Q^{(n)}|$ — его объем.

Теорема 2. *Пусть для каждого n выполнено одно из условий: а) существует последовательность кубов $(Q_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ с неограниченно растущей длиной ребра такая, что*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|Q_j^{(n)}|} \int\limits_{Q_j^{(n)}\times\mathbf{R}^\infty} |q(x)|^2 p_1^{-1}(x_1) \ldots p_n^{-1}(x_n)\, d\rho(x) = 0;$$

б) *для любого $\delta > 0$*

$$\int\limits_{D_\delta} |q(x)|^2 p_1^{-1}(x_1) \ldots p_n^{-1}(x_n)\, d\rho(x) < \infty,$$

где $D_\delta = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid |q(x)| \geqslant \delta\}$; тогда $\sigma_{\text{cont}}(A) \supseteq [0, \infty)$.

Доказательство теоремы основано на построении пробной системы функций.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbf{R}^\infty, d\rho(x))$ оператор

$$C_{0,\text{Ц}}^\infty(\mathbf{R}^\infty) \ni u \mapsto (Nu)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(x^{(k)})\, (\text{Ц}_k u)(x^{(k)}) \in L_2(\mathbf{R}^\infty, d\rho(x)),$$

где $q_k(x^{(k)})$ — вещественнозначные функции, такие, что начиная с некоторого K $|q_k(x^{(k)})| \leqslant \mu_k$ $(k > K)$ и $\sum_{k=K+1}^{\infty} \mu_k < \infty$, а Ц_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — операторы проектирования на подпространство функций, зависящих от первых k переменных, имеющие вид

$$(\text{Ц}_k f)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^\infty} f(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots) \bigotimes_{m=k+1}^{\infty} (p_m(y_m)\, dy_m).$$

Легко видеть, что оператор N симметричен. Используя технику квадратичных форм, [4], получим следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть потенциал $q(x) \geqslant 0$ удовлетворяет одному из условий теоремы 2, а $q_k(x^{(k)})$ такие, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$*

$$\int\limits_{S_1(x^{(k)})} |q_k(y^{(k)})|\, d^k y \underset{|x^{(k)}|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4}$$

$(S_r(x^{(k)})$ — шар в $\mathbf{R}^k$ радиуса r с центром в $x^{(k)} \in \mathbf{R}^k)$,

$$\int\limits_{S_a(x^{(k)})} |q_k(x^{(k)})|\, |x^{(k)} - y^{(k)}|^{1-k} d^k y \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{5}$$

равномерно по $x^{(k)} \in \mathbf{R}^k$. Тогда оператор $\widetilde{A+N}$ ($\widetilde{B}$ — замыкание оператора B) самосопряжен и $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{A+N}) = [0, \infty)$, а отрицательный спектр является чисто дискретным с единственно возможной точкой сгущения в нуле.

Теорема 4. *Пусть $q \geqslant 0$ и удовлетворяет одному из условий теоремы 2. Если для функций $q_k(x^{(k)})$ выполняются следующие два требования:*

1) *при каждом $k = 1, 2, \ldots$ для функций $|y^{(k)}|^2 q_k(y^{(k)})$ выполнено условие (4), а для $y^{(k)} q_k(y^{(k)})$ — условие (5);*

2) *существует* K *такое, что при* $k > K$

$$|x^{(k)}|^2 |q_k(x^{(k)})| \leqslant c_k, \quad \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k (k-2)^{-2} < \infty,$$

то $\widetilde{A+N}$ *самосопряжен и* $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{A+N}) = [0, \infty)$, *а отрицательный спектр оператора* $\widetilde{A+N}$ *конечен.*

Теоремы 4 и 5 — обобщение известных в конечномерной ситуации утверждений [4]. Действительно, в случае R^n $q_k(x^{(k)}) \equiv 0$ при $k = n+1, \ldots$ и указанные утверждения получатся, если положить $q_k = 0$ при $k = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М., Самойленко В. Г. Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 9, с. 962—965.
2. Березанский Ю. М., Самойленко В. Г. Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения: Препринт 79.16.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— 65 с.
3. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М.: Физматгиз, 1963.— 337 с.
4. Бирман М. Ш. О спектре сингулярных граничных задач.— Мат. сборник, 1961, **55**, № 2, с. 125—174.
5. Peed M. The damped self — interaction.— Communs Math. Phys., 1969, **11**, № 4, p. 346—357.
6. Коломыцев В. И., Самойленко Ю. С. О счетном наборе коммутирующих самосопряженных операторов и канонических коммутационных соотношениях.— В кн.: Методы функционального анализа в задачах математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 115—128.
7. Березанский Ю. М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев: Наук. думка, 1978.— 358 с.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1.— М.: Мир, 1977.— 357 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 18.VI 1979 г.
после переработки — 8.I 1980 г.