УДК 517.549:517.91

А. А. Гольдберг

О росте мероморфных в круге функций с ограничениями на логарифмическую производную

1°. Основные результаты и стандартные обозначения неванлинновской теории предполагаются известными [1]. Во многих вопросах (в частности, в аналитической теории дифференциальных уравнений [2—5]) важно получить ограничения на рост мероморфной функции, исходя из ограничений на ее логарифмическую производную. Настоящая статья посвящена решению задачи Кауфмана [6]. Пусть f мероморфна в единичном круге D и $|f'| \geqslant |f|$. Что можно сказать о росте f?

Если $|f'| \geqslant |f|$, то f'/f не принимает значений из единичного круга, следовательно,

$$T(r, f'/f) = O(1), \quad r \to 1. \tag{1}$$

В работе [4] показано, что из (1) не следует никаких ограничений на рост $T(r, f)$. Здесь покажем, что аналогичный вывод можно сделать и при значительно более жестком ограничении

$$|f'(z)/f(z)| \geqslant 1, \quad z \in D. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\Phi(r)$ — произвольная положительная на $[0,1)$ монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $r \to 1$ функция. Существует мероморфная в D функция f, удовлетворяющая* (2) *и такая, что*

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, T(r, f)/\Phi(r) \geqslant 1. \tag{3}$$

Если ограничиться аналитическими в D функциями, то высказывания о росте f можно легко получить не только при условии (2), но и при более слабом условии (1).

Теорема 2. *Если f — аналитическая функция в D, такая, что выполняется* (1), *то*

$$\ln\ln M(r, f) = O((1-r)^{-1}), \quad r \to 1. \tag{4}$$

Для $f(z) = \exp\exp(4/(1-z))$ выполняется (2) *и* $\ln\ln M(r, f) = 4/(1-r)$.

В [4] доказана теорема 2 (и более общий результат) с оценкой

$$\ln T(r, f) = O((1-r)^{-2}), \quad r \to 1, \tag{5}$$

вместо (4). Обобщения теоремы 2 и их приложения к аналитической теории дифференциальных уравнений будут обсуждены в конце статьи.

2°. Доказательство теоремы 1. Пусть $b_n = 1 - 2^{-n}$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Существует последовательность функций $\psi(z; b_n)$, аналитических в D, действительных на действительном диаметре D, $0 < |\psi(z; b_n)| < 1$ при $z \in D$, таких, что*

$$|\psi(b_n; b_n)| \geqslant C_1 > 0, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(z; b_n)| \leqslant C_2, \quad z \in D, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные.

Справедливость этой леммы вытекает из рассуждений работы [7].

Пусть $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n-1} < a_{2n} < 1$, $a_{2k-1} \in b$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $B_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} B(a_k, z)$, $B(a, z) = \frac{a - z}{1 - za}$. Тогда

$$B_n'(a_\nu) = -\frac{1}{1 - a_\nu^2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^{2n} B(a_k, a_\nu).$$

Легко видеть, что $B_n'(a_{2k-1}) < 0$, $B_n'(a_{2k}) > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$

$$m_{n\nu} = [|B_n'(a_\nu)|^{-1}] \geqslant 1, \ m_n = m_{n,2n-1}, \quad h_{n\nu} = -\ln(m_{n\nu}|B_n'(a_\nu)|) > 0,$$

$$B_{n\nu}(z) = B_n(z)\{B(a_\nu, z)\}^{-1}, \quad g_{n,2k-1}(z) = \psi(z; a_{2k-1}) B_{n,2k-1}(z),$$

$$g_{n,2k}(z) = \psi(z; a_{2k-1}) B_{n,2k}(z), \ 1 \leqslant k \leqslant n, \quad h_n(z) = \sum_{\nu=1}^{2n} h_{n\nu} g_{n\nu}(z)/g_{n\nu}(a_\nu).$$

Очевидно, что

$$B_{n\nu}(a_\nu) = -B_n'(a_\nu)(1 - a_\nu^2), \tag{8}$$

$$h_n(a_\nu) = h_{n\nu}. \tag{9}$$

Лемма 2. *При фиксированных* a_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant 2n - 2$, $0 < a_1 < \ldots \ldots < a_{2n-2} < 1$, $a_{2k-1} \in b$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, *и* $\varepsilon > 0$ *можно выбрать* $a_{2n-1} \in b$ *и* $a_{2n} = a_{2n-1} + \eta_n$, $\eta_n > 0$, $a_{2n-2} < a_{2n-1} < a_{2n} < 1$, *так, что:*

1) $1 - \varepsilon < a_{2n-1} < 1;$ (10)

2) *числа* $|B_n'(a_{2n-1})|^{-1}$ *и* $|B_n'(a_{2n})|^{-1}$ *нецелые и* $[|B_n'(a_{2n-1})|^{-1}] = [|B_n'(a_{2n})|^{-1}] = m_n$;

3) $$m_n \frac{1 - a_{2n-1}}{1 + a_{2n-1}} \geqslant \Phi\left(\frac{1 + a_{2n-1}}{2}\right), \tag{11}$$

где Φ — *функция из теоремы* 1;

4) *при* $z \in D$ *выполняется*

$$T_n(z) = \left| \frac{h_{n,2n-1} B(a_{2n}, z)}{|B_n'(a_{2n-1})|(1 - a_{2n-1}^2)\psi(a_{2n-1}; a_{2n-1})} - \right.$$
$$\left. - \frac{h_{n,2n} B(a_{2n-1}, z)}{|B_n'(a_{2n})|(1 - a_{2n}^2)\psi(a_{2n}; a_{2n-1})} \right| < K, \tag{12}$$

где $K = 4(1 + 9C_1)C_1^{-2}$, C_1 — *постоянная из леммы* 1.

Доказательство. Можно считать неравенство (10) выполненным. Обозначим

$$L_n(\eta) = (1 - (a_{2n-1} + \eta)^2) \prod_{k=1}^{2n-2} \{B(a_{2n-1} + \eta, a_k)\}^{-1}.$$

Тогда

$$L_n'(0) = -2a_{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-2} \{B(a_{2n-1}, a_k)\}^{-1} - (1 - a_{2n-1}^2) \prod_{k=1}^{2n-2} \{B(a_{2n-1}, a_k)\}^{-1} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{2n-2} \left(\frac{a_k}{1 - a_{2n-1}a_k} + \frac{1}{a_{2n-1} - a_k}\right), \ \lim_{a_{2n-1} \to 1} L_n'(0) = -2.$$

Будем считать $a_{2n-1} \in b$ столь близким к 1, что

$$-3 < L_n'(0) < -1, \tag{13}$$

$$1 - a_{2n-1}^2 < 1/12. \tag{14}$$

Это значение a_{2n-1} фиксируем. Будем выбирать a_{2n} или, что равносильно, η_n. Пусть сначала $a_{2n} = a_{2n-1} + \eta$, где η непрерывно изменяется на интервале $(0, 1 - a_{2n-1})$. Так как

$$B_n'(a_{2n-1}) = -\eta \{(1 - a_{2n-1}(a_{2n-1} + \eta)) L_n(0)\}^{-1}, \tag{15}$$

то $B_n'(a_{2n-1}) \to 0$ при $\eta \to 0$. Возьмем убывающую последовательность $\eta = \eta^{(j)} \to 0$ при $j \to \infty$, такую, что

$$|B_n'(a_{2n-1})| < 1, \ |B_n'(a_{2n-1})|^{-1} = [|B_n'(a_{2n-1})|^{-1}] + 1/2 = m_n + 1/2. \tag{16}$$

В дальнейшем будем брать η только из этой последовательности, не оговаривая этого особо. Учитывая (15) и $B_n'(a_{2n}) = \eta \{(1 - a_{2n-1}(a_{2n-1} + \eta)) \times \times L_n(\eta)\}^{-1}$, получаем, что

$$\lim_{\eta \to 0} (|B_n'(a_{2n})|^{-1} - |B_n'(a_{2n-1})|^{-1}) = (1 - a_{2n-1}^2) L_n'(0). \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$|B_n'(a_{2n})|^{-1} = m_n + \frac{1}{2} + (1 - a_{2n-1}^2) L_n'(0) + o(1), \ \eta \to 0. \tag{18}$$

Так как $(x + \theta + o(1)) \ln \dfrac{x + \theta + o(1)}{x} = \theta + o(1)$, $x \to \infty$, то из (16) и (18) следует, что

$$\lim_{\eta \to 0} \left\{ \frac{h_{n,2n-1}}{|B_n'(a_{2n-1})|} - \frac{h_{n,2n}}{|B_n'(a_{2n})|} \right\} = -(1 - a_{2n-1}^2) L_n'(0). \tag{19}$$

Выберем η столь малым, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\text{а) } m_n + \frac{1}{4} < |B_n'(a_{2n})|^{-1} < m_n + \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Этого можно добиться в силу (13), (14) и (18); в свою очередь, из (16) и (20) вытекает выполнение требования 2);

$$\text{б) } |B_n'(a_{2n-1})|^{-1} \geqslant \frac{1 + a_{2n-1}}{1 - a_{2n-1}} \Phi\left(\frac{1 + a_{2n-1}}{2}\right) + 1.$$

Это обеспечивает справедливость (11);

$$\text{в) } 1 > \frac{1 - a_{2n}}{1 - a_{2n-1}} > \frac{1}{2}, \ 1 > \frac{1 - a_{2n}^2}{1 - a_{2n-1}^2} > \frac{1}{2}, \tag{21}$$

$$0 < \eta < (1 - a_{2n-1})^3; \tag{22}$$

$$\text{г) } |\psi(a_{2n}; a_{2n-1})| \geqslant C_1/2; \tag{23}$$

$$\text{д) } \frac{1}{1 - a_{2n}^2} \left| \frac{h_{n,2n-1}}{|B_n'(a_{2n-1})|} - \frac{h_{n,2n}}{|B_n'(a_{2n})|} \right| < 6, \tag{24}$$

что достижимо согласно (13), (19) и (21).

Это значение η и выбираем за η_n. Остается показать, что выполняется (12).

Так как $|\psi(z;a_{2n-1})|<1$ в D, то $|\psi'(z;a_{2n-1})|\leqslant 1/(1-|z|)$. Поэтому, учитывая (21), получаем

$$|\psi(a_{2n};a_{2n-1})-\psi(a_{2n-1};a_{2n-1})|\leqslant 2\eta_n(1-a_{2n-1})^{-1},$$

$$|\psi(a_{2n};a_{2n-1})^{-1}-\psi(a_{2n-1};a_{2n-1})^{-1}|\leqslant 4\eta_n C_1^{-2}(1-a_{2n-1})^{-1}. \tag{25}$$

Далее,

$$|B(a_{2n},z)-B(a_{2n-1},z)|\leqslant 4\eta_n(1-a_{2n-1})^{-2}, \tag{26}$$

$$(1-a_{2n}^2)^{-1}-(1-a_{2n-1}^2)^{-1}\leqslant 4\eta_n(1-a_{2n-1})^{-2}. \tag{27}$$

Заметим также, что

$$h_{n,2n-1}|B_n'(a_{2n-1})|^{-1}\leqslant \max\left\{\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{p+\frac{1}{2}}:p\in\mathbf{N}\right\}=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}<1. \tag{28}$$

С помощью (23) — (28) находим

$$T_n(z)<\frac{4\eta_n}{C_1(1-a_{2n-1})^3}+\frac{4\eta_n}{C_1^2(1-a_{2n-1})^2}+\frac{8\eta_n}{C_1(1-a_{2n-1})^2}+\frac{24}{C_1}.$$

Учитывая (22), получаем (12). Лемма 2 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Сначала построим по индукции последовательности функций $B_n(z)$ и $h_n(z)$. Функции $B_1(z)$ и $h_1(z)$ строим так, чтобы выполнялись условия леммы 2 с $\varepsilon=1$ и с пустым множеством $\{a_\nu:1\leqslant\nu\leqslant 2n-2\}$, $n=1$. Предположим, что построены функции $B_{n-1}(z)$ и $h_{n-1}(z)$, для которых при $\mu=n-1$ выполнены следующие условия:

1′) числа $|B_\mu'(a_\nu)|^{-1}$, $1\leqslant\nu\leqslant 2\mu$, нецелые, причем

$$[|B_\mu'(a_{2k-1})|^{-1}]=[|B_\mu'(a_{2k})|^{-1}]=m_k,\quad 1\leqslant k\leqslant\mu; \tag{29}$$

2′)

$$m_k\,\frac{1-a_{2k-1}}{1+a_{2k-1}}\geqslant\Phi\left(\frac{1+a_{2k-1}}{2}\right), \tag{30}$$

где Φ — функция из теоремы 1, $1\leqslant k\leqslant\mu$;

3′) при $z\in D$ и $1\leqslant k\leqslant\mu$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{h_{\mu,2k-1}B(a_{2k},z)}{|B_\mu'(a_{2k-1})|(1-a_{2k-1}^2)\psi(a_{2k-1};a_{2k-1})}-\right.$$

$$\left.-\frac{h_{\mu,2k}B(a_{2k-1},z)}{|B_\mu'(a_{2k})|(1-a_{2k}^2)\psi(a_{2k};a_{2k-1})}\right|<K. \tag{31}$$

Построим $B_n(z)$ и $h_n(z)$. Возьмем $B_n(z)=B_{n-1}(z)B(a_{2n-1},z)B(a_{2n},z)$, $a_{2n-2}<a_{2n-1}<a_{2n}<1$. При $a_{2n-1}\to 1$ функция $B_n(z)$ стремится к $B_{n-1}(z)$ равномерно на каждом компакте, содержащемся в D. Поэтому $B_n'(a_\nu)\to$ $\to B_{n-1}'(a_\nu)$, $h_{n,\nu}\to h_{n-1,\nu}$, $1\leqslant\nu\leqslant 2n-2$. Следовательно, найдется такое $\varepsilon>0$, что при $1-\varepsilon<a_{2n-1}<1$ соотношения 1′), 2′), 3′) сохранят силу, если в них $\mu=n$, но по-прежнему $1\leqslant k\leqslant n-1$. Теперь с данными ε и a_ν, $1\leqslant\nu\leqslant 2n-2$, выбираем a_{2n-1} и a_{2n} согласно лемме 2. Тогда соотношения 1′), 2′), 3′) с $\mu=n$ будут выполняться и при $k=n$. Таким образом, последовательности функций B_n и h_n со свойствами 1′), 2′), 3′) построены.

Оценим $|h_n(z)|$ в D, используя (29) и (31):

$$|h_n(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| h_{n,2k-1} \frac{\psi(z;\, a_{2k-1}) B_{n,2k-1}(z)}{\psi(a_{2k-1};\, a_{2k-1}) B_{n,2k-1}(a_{2k-1})} + \right.$$

$$\left. + h_{n,2k} \frac{\psi(z;\, a_{2k-1}) B_{n,2k}(z)}{\psi(a_{2k};\, a_{2k-1}) B_{n,2k}(a_{2k})} \right| = \sum_{k=1}^{n} |\psi(z;\, a_{2k-1})| \left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq 2k-1,2k}}^{2n} |B(a_\nu, z)| \right) \times$$

$$\times \left| \frac{h_{n,2k-1} B(a_{2k}, z)}{|B_n'(a_{2k-1})|\,(1 - a_{2k-1}^2)\, \psi(a_{2k-1};\, a_{2k-1})} - \right.$$

$$\left. - \frac{h_{n,2k} B(a_{2k-1}, z)}{|B_n'(a_{2k})|\,(1 - a_{2k}^2)\, \psi(a_{2k};\, a_{2k-1})} \right| < K \sum_{k=1}^{n} |\psi(z;\, a_{2k-1})| \leqslant KC_2.$$

Пусть $F_n(z) = B_n(z) \exp h_n(z)$. Тогда $|F_n(z)| < \exp(KC_2)$ в D, $F_n(a_\nu) = 0$ при $1 \leqslant \nu \leqslant 2n$ и $F_n(z) \neq 0$ в других точках из D,

$$F_n'(a_\nu) = B_n'(a_\nu) \{m_{n\nu} |B_n'(a_\nu)|\}^{-1}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 2n,$$

$$F_n'(a_{2k}) = -F_n'(a_{2k-1}) = m_k^{-1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

По принципу компактности из (F_n) можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах D к аналитической функции F такой, что $|F(z)| < \exp(KC_2)$ при $z \in D$, $F(a_\nu) = 0$, $\nu \in \mathbf{N}$, $F'(a_{2k}) = -F'(a_{2k-1}) = m_k^{-1}$, $k \in \mathbf{N}$. По теореме Гурвица $F(z) \neq 0$ при $z \bar{\in} \{a_\nu\}$. Пусть $N = [\exp(KC_2)] + 1$. Тогда $H(z) = F(z)/N$ удовлетворяет условиям: $|H(z)| < 1$, $H(a_\nu) = 0$, $\nu \in \mathbf{N}$, $H(z) \neq 0$ при $z \bar{\in} \{a_\nu\}$, $H'(a_{2k}) = -H'(a_{2k-1}) = (Nm_k)^{-1}$, $k \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим в $D \diagdown \{a_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$ аналитическую функцию $f(z) = \exp \int\limits_0^z \{H(\zeta)\}^{-1} d\zeta$. Так как подынтегральная функция имеет простые полюсы лишь в точках a_ν, причем вычеты во всех этих точках целочисленны, то f — однозначная функция в $D \diagdown \{a_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$. Нетрудно убедиться, что f мероморфно продолжается на D, причем f имеет в a_{2k-1} полюс порядка Nm_k, а в a_{2k} — нуль порядка Nm_k. Мероморфная в D функция f является искомой. Действительно, $|f'(z)/f(z)| = |H(z)|^{-1} > 1$ в D, а в силу (30)

$$T((a_{2k-1} + 1)/2, f) \geqslant N((a_{2k-1} + 1)/2, f) \geqslant \int\limits_{a_{2k-1}}^{(a_{2k-1}+1)/2} n(t, f) \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant Nm_k \frac{1 - a_{2k-1}}{1 + a_{2k-1}} \geqslant \Phi((a_{2k-1} + 1)/2),$$

т. е. выполняется (3).

3°. Докажем утверждения, несколько более общие, чем теорема 2. Будем говорить, что множество кругов $C = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{z : |z - z_k| < r_k\}$, $|z_k| + r_k < 1$, принадлежит классу E, если сумма неевклидовых радиусов кругов $\{z : |z - z_k| < r_k\}$ конечна, или, что равносильно, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k (1 - |z_k|)^{-1} <$

$< \infty$. Обозначим $\omega(C) = \{r \in [0, 1) : \{z : |z| = r\} \cap C \neq \varnothing\}$. Легко убедиться, что если $C \in E$, то $\int\limits_{\omega(C)} (1-r)^{-1}\, dr < \infty$.

Теорема 3. *Если f — мероморфная функция в D, для которой выполняется* (1), *то существует такое* $\Delta \subset [0, 1)$,

$$\int\limits_{\Delta} (1-r)^{-1}\, dr < \infty, \tag{32}$$

что имеют место соотношения

$$\ln \ln M(r, f) = O\left((1-r)^{-1}\right), \ r \to 1, \ r \bar{\in} \Delta, \tag{33}$$

$$\ln \ln M(r, 1/f) = O\left((1-r)^{-1}\right), \ r \to 1, \ r \bar{\in} \Delta. \tag{34}$$

Если

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \ln T(r, f'/f)/(-\ln(1-r)) = \rho < \infty, \tag{35}$$

то существует такое множество $\Delta \subset [0, 1)$, *для которого выполняется* (32), *что имеют место неравенства*

$$\overline{\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \bar{\in} \Delta}}} \ln \ln \ln M(r, f)/(-\ln(1-r)) \leqslant \rho + 1, \tag{36}$$

$$\overline{\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \bar{\in} \Delta}}} \ln \ln \ln M(r, 1/f)/(-\ln(1-r)) \leqslant \rho + 1. \tag{37}$$

Если f — аналитическая функция в D, то в (33) *и* (36) *можно не требовать, чтобы* $r \bar{\in} \Delta$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0, \infty$. Из результатов работы [8, теорема 4] следует, что существует такое множество кружков $C \in E$, что при $z \bar{\in} C$ выполняется $|f'(z)/f(z)| < \exp\{A(1-|z|)^{-1}\}$, где постоянная A зависит от f. Возьмем за Δ множество $\omega(C)$. Легко видеть, что существуют r_0, $0 < r_0 < 1$, и радиус $R = \{z = te^{i\theta_1} : 0 \leqslant t < 1\}$, который не пересекается с $C \cap \{z : r_0 \leqslant |z| < 1\}$ и не проходит через нули и полюсы f. Тогда существует постоянная $A_1 > 1$, такая, что $|f'(z)/f(z)| \leqslant A_1 \exp\{A(1-|z|)^{-1}\}$, $z \in R$. Пусть $r \bar{\in} \Delta$. Тогда

$$\left| \ln |f(re^{i\theta})| - \ln |f(0)| \right| = \left| \operatorname{Re} \int\limits_{L} (f'(\zeta)/f(\zeta))\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{L} |f'(\zeta)/f(\zeta)|\, |d\zeta| \leqslant (1 + 2\pi) A_1 \exp\{A(1-r)^{-1}\}, \tag{38}$$

где L — кривая, состоящая из отрезка $\{z = te^{i\theta_1} : 0 \leqslant t \leqslant r\}$ и дуги окружности $\{z : |z| = r\}$ между точками $re^{i\theta_1}$ и $re^{i\theta}$. Из (38) следуют соотношения (33) и (34).

Если выполняется (35), то, как известно, существует такая функция $\rho(x)$, заданная на $[1, \infty)$, $\rho(x) \to \rho$, $\rho'(x)\, x \ln x \to 0$ при $x \to +\infty$, что $T(r, f'/f) \leqslant (1-r)^{-\rho_1(r)}$, $\rho_1(r) = \rho(1/(1-r))$, $0 < r_1 \leqslant r < 1$. Из результатов работ [8, теоремы 2 и 3] и [9, теоремы 1 и 2] следует, что существует такое множество кружков $C \in E$, что при $z \bar{\in} C$ выполняется неравенство

$$|f'(z)/f(z)| < \exp\left\{(1-|z|)^{-\rho_1(|z|)-1} \ln^2 \frac{e}{1-|z|}\right\}.$$

Соотношения (36) и (37) доказываются так же, как и (33) и (34). Учитывая, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $\Delta \cap [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-n-1}] \neq \varnothing$, а также монотонность $M(r, f)$ для аналитической функции f, получаем последнее утверждение теоремы 3. Отсюда и из (33) вытекает справедливость теоремы 2.

Замечание 1. Следуя работе [4], можно получить, что (4) выполняется для всякого аналитического в D решения алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого — аналитические в D ограниченные функции. Так же (см. [3]) можно показать, что для всякого аналитического в D решения f алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого a_{ij} — аналитические в D функции, такие, что $\overline{\lim\limits_{r\to 1}} \ln T(r, a_{ij})/(-\ln(1-r)) \leqslant \rho < \infty$, выполняется (36) (без требования $r \overline{\in} \Delta$).

Замечание 2. Так как $N(r, f) - N(r, 1/f) = m(r, 1/f) - m(r, f) + \text{const}$, то при выполнении (1) из (33) и (34) следует, что $\ln^+ |N(r, f) - N(r, 1/f)| = O((1-r)^{-1})$, $r \to 1$, $r \overline{\in} \Delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейман У. К. Мероморфные функции.— М.: Мир, 1966.— 287 с.
2. Bank S. B. A note on algebraic differential equations whose coefficients are entire functions of finite order.— Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1972, **26**, p. 291—298.
3. Bank S. B. On solutions of algebraic differential equations whose coefficients are analytic functions in the unit disk.— Ann. mat. pura appl., 1972, **92**, p. 323—335.
4. Bank S. B. On the existence of meromorphic solutions of differential equations having arbitrarily rapid growth.— J. reine und angew. Math., 1976, **288**, p. 176—182.
5. Bank S., Laine I. On the growth of meromorphic solutions of linear and algebraic differential equations.— Math. scand., 1977, **40**, p. 119—126.
6. Kaufman R. Problems by R. Kaufman.— 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа.— Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.; Наука, 1978. т. 81, с. 247.
7. Hayman W. Interpolation by bounded functions. — Ann. Inst. Fourier, 1959, **8**, p. 277—290.
8. Ушакова И. В. Некоторые оценки субгармонических функций в круге.— Зап. мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. об-ва, 1963, **29**, с. 53—66.
9. Ушакова И. В. Некоторые теоремы единственности для функций субгармонических и мероморфных в единичном круге. — ДАН СССР, 1961, **137**, № 6, с. 1319—1322.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.XII 1978 г.