УДК 517.53

И. М. Гальперин

К проблеме коэффициентов многолистных спиральных функций

Обозначим через $S_k^p(\theta)$ класс многолистных θ-спиральных функций в круге $|z| < 1$, определяемых структурной формулой

$$f_k(z) = z^p \exp\left[-\frac{\lambda}{\pi k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - z^k e^{-it})\, d\mu(t)\right], \tag{1}$$

$$\lambda = pe^{i\theta}\cos\theta, \quad p \geqslant 1 — \text{целое}, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}, \quad z = re^{i\varphi},$$

$$\mu(t) \uparrow (-\pi\pi), \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 2\pi$$

и разложением

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{p+kj} z^{p+kj}, \quad a_p = 1. \tag{2}$$

Для функций этого класса автором были решены некоторые экстремальные задачи [1].

Настоящая заметка посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. *В классе $S_k^p(\theta)$ имеют место оценки для коэффициентов разложения* (2):

$$|a_{p+kn}| \leqslant \frac{1}{k^n n!}\prod_{j=0}^{n-1}\sqrt{4\cos^2\theta p(p + kj) + k^2 j^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти оценки точны, и каждая из них реализуется только функцией

$$f_k(z) = \frac{z^p}{(1 - z^k e^{-it})^{\frac{2\lambda}{k}}} \tag{3}$$

этого же класса.

Для доказательства воспользуемся ходом рассуждений, предложенным в работах [2, 3, 4]. Из (1) находим

$$\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)} = \lambda[P(z^k) - 1] + p, \tag{4}$$

где

$$P(z^k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+z^ke^{-it}}{1-z^ke^{-it}}\,d\mu(t),\quad \operatorname{Re}P(z^k)>0,\quad |z|<1.$$

Пусть

$$\omega(z)=\frac{P(z^k)-1}{P(z^k)+1}=\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}. \tag{5}$$

Тогда, как известно, на окружности $|z|=r<1$

$$|\omega(z)|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}\right|\leqslant 1. \tag{6}$$

Из (4) и (5) находим

$$\omega(z)\,[zf_k'(z)+(2\lambda-p)f_k(z)]=zf_k'(z)-pf_k(z). \tag{7}$$

Так как

$$zf_k'(z)+(2\lambda-p)f_k(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}$$

$$\text{и}\quad zf_k'(z)-pf_k(z)=\sum_{j=1}^{\infty}kja_{p+kj}z^{p+kj},$$

то из (7) с учетом (5) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}\sum_{j=0}^{\infty}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}=\sum_{j=1}^{\infty}kja_{p+kj}z^{p+kj}$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}+\sum_{j=n}^{\infty}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}kja_{p+kj}z^{p+kj}+\sum_{j=n+1}^{\infty}kja_{p+kj}z^{p+kj}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}\sum_{j=0}^{n-1}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}=\sum_{j=1}^{n}kja_{p+kj}z^{p+kj}+$$

$$+\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}kja_{p+kj}z^{p+kj}-\sum_{j=1}^{\infty}\omega_{kj}z^{kj}\sum_{j=n}^{\infty}(2\lambda+kj)\,a_{p+kj}z^{p+kj}\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}kja_{p+kj}z^{p+kj}+\sum_{j=n+1}^{\infty}c_{p+kj}z^{p+kj},$$

где c_{p+kj} — некоторые комплексные числа.

С учетом (6) из последнего соотношения для $r<1$ находим

$$k^2\sum_{j=0}^{n}j^2\,|a_{p+kj}|^2\,r^{2(p+kj)}+\sum_{j=n+1}^{\infty}|c_{p+kj}|^2\,r^{2(p+kj)}\leqslant$$

$$\leqslant r^{2k}\sum_{j=0}^{n-1}|2\lambda+kj|^2\,|a_{p+kj}|^2\,r^{2(p+kj)} \tag{8}$$

и, тем более,

$$k^2 \sum_{j=0}^{n} j^2 |a_{p+kj}|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |2\lambda + kj|^2 |a_{p+kj}|^2. \tag{9}$$

Отсюда

$$k^2 n^2 |a_{p+kn}| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [|2\lambda + kj|^2 - k^2 j^2] |a_{p+kj}|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} 4\cos^2\theta p(p + kj) |a_{p+kj}|^2$$

и

$$|a_{p+kn}|^2 \leqslant \frac{4\cos^2\theta}{k^2 n^2} \sum_{j=0}^{n-1} p(p+kj)|a_{p+kj}|^2, \quad |a_p| = 1. \tag{10}$$

Для $n = 1$ из (10) находим $|a_{p+k}| \leqslant \dfrac{2p\cos\theta}{k}$. Предположим, что справедлива оценка

$$|a_{p+k(n-1)}|^2 \leqslant \frac{4\cos^2\theta}{k^2(n-1)^2} \sum_{j=0}^{n-2} p(p+kj)|a_{p+kj}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \prod_{j=0}^{n-2} [4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2], \tag{11}$$

т. е. $|a_{p+k(n-1)}| \leqslant \dfrac{1}{k^{n-1}(n-1)!} \prod\limits_{j=0}^{n-2} \sqrt{4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2}$.

Воспользовавшись методом математической индукции, из (10) и (11) получим

$$|a_{p+kn}|^2 \leqslant \frac{4\cos^2\theta}{k^2 n^2} \sum_{j=0}^{n-1} p(p+kj)|a_{p+kj}|^2 =$$

$$= \frac{4\cos^2\theta}{k^2 n^2} \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} p(p+kj)|a_{p+kj}|^2 + p(p+k(n-1))|a_{p+k(n-1)}| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\cos^2\theta}{k^2 n^2} \left\{ \frac{k^2(n-1)^2}{4\cos^2\theta k^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \prod_{j=0}^{n-2} [4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{p(p+k(n-1))}{k^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \prod_{j=0}^{n-2} [4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2] \right\} =$$

$$= \frac{1}{k^{2n}(n!)^2} \prod_{j=0}^{n-1} [4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2]$$

и

$$|a_{p+kn}| \leqslant \frac{1}{k^n n!} \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{4\cos^2\theta p(p+kj) + k^2 j^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

Выясним вопрос о знаке равенства в этой оценке. Из (8) следует, что знак равенства в (9) возможен только при $c_{p+kj} = 0$ $(j = n + 1, \ldots)$ и $\left| \frac{\omega(z)}{z^k} \right| = 1$ на $|z| = r$, т. е. когда $\omega(z) = z^k e^{-it}$ и, следовательно,

$$P(z^k) = \frac{1 + z^k e^{-it}}{1 - z^k e^{-it}}.$$

Отсюда следует, что полученные оценки точны, и каждая из них реализуется только функцией (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперін І. М. До теорії p-валентних спіральних функцій.— Допов. АН УРСР, 1959, № 10, с. 1051—1053.
2. Clunie I. On meromorphic Schlicht functions journ. Lond. Mat. Soc., 1959, **34**, part 2, N 134, p. 215—216.
3. Zamorski J. About the extremel spiral schlicht functions.— Ann. Pol. Math., 1961, **9**, N 3, p. 265—273.
4. Zamorski J. Oszacovanie wspólczynników funkcji nelezacych do dwóch klas K — symmetcznych funkcji jednokratnych.— Roczniki Pol. tow. mat. Ser. 1, prace mat. 1961, 1, p. 101—105.

Киевский
автомобильно-дорожный институт

Поступила в редакцию
14.XI 1978 г