УДК 517.917

Ле суан Кан

Асимптотические разложения квазипериодических решений для нелинейной неавтономной системы с запаздыванием

1. Рассматриваем систему уравнений с запаздыванием, описывающую колебательные процессы с внешним возмущением:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx_\Delta + \varepsilon F(x, x_\Delta, \nu t), \tag{1}$$

где x, F — N-мерные векторы, A, B — постоянные квадратные матрицы N-го порядка, $x_\Delta = x(t-\Delta)$, $\Delta > 0$ — постоянное запаздывание аргумента, $\nu t = (\nu_1 t, \ldots, \nu_M t)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, F — периодическая по νt с периодом 2π функция, которая может быть представлена в виде конечной суммы Фурье

$$F(x, y, \theta) = \sum_k F_k(x, y) e^{i(k,\theta)},$$

где через (,) обозначено скалярное произведение. Кроме того, предполагаем, что коэффициенты $F_k(x, y)$ — некоторые полиномы относительно x, y.

Наряду с (1) рассмотрим линейную порождающую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx_\Delta \tag{2}$$

и соответствующее квазихарактеристическое уравнение

$$D(\rho) = |A + Be^{-\Delta\rho} - E\rho| = 0, \tag{3}$$

где E — единичная матрица N-го порядка.

Предполагаем, что уравнение (3) имеет S пар чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$ $(s = 1, \ldots, S)$, удовлетворяющих условию:

$(k, \lambda) + (l, \nu) \neq 0$ лишь только $|k| + |l| > 0$, где $k = (k_1, \ldots, k_R)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_R)$ $(R \leqslant S)$, $l = (l_1, \ldots, l_M)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_M)$, $|k| \sum_{r=1}^{R} |k_r|$, $|l| = \sum_{m=1}^{M} |l_m|$. Остальные чисто мнимые корни выражаются через λ, ν в виде $\lambda_t = \frac{1}{n_t} [(p^{(t)}, \lambda) + (q^{(t)}, \nu)]$ $(t = R + 1, \ldots, S)$, где $p^{(t)} = (p_1^{(t)}, \ldots, p_R^{(t)})$, $q^{(t)} = (q_1^{(t)}, \ldots, q_M^{(t)})$, n_t — некоторое целое число.

Кроме того, предполагаем, что остальные корни уравнения (3) имеют достаточно большую по величине отрицательную вещественную часть.

При таких условиях система (2) имеет семейство квазипериодических решений с частотным базисом $\lambda_1, \ldots, \lambda_R, \nu_1, \ldots, \nu_M$ вида

$$x = \sum_{r=1}^{R} a_r^{(0)} \left(y^{(r)} e^{i(\lambda_r t + \alpha_r^{(0)})} + \bar{y}^{(r)} e^{-i(\lambda_r t + \alpha_r^{(0)})}\right) +$$

$$+ \sum_{t=R+1}^{S} a_t^{(0)} \left(y^{(t)} e^{i\left[\frac{1}{n_t}((p^{(t)},\lambda)+(q^{(t)},\nu))t + \alpha_t^{(0)}\right]} + \bar{y}^{(t)} e^{-i\left[\frac{1}{n_t}((p^{(t)},\lambda)+(q^{(t)},\nu))t + \alpha_t^{(0)}\right]}\right), \quad (4)$$

где $a_s^{(0)}$, $\alpha_s^{(0)}$ — произвольные постоянные, $y^{(s)}$ — собственный вектор, определяющийся из системы уравнений $(A + Be^{-i\Delta\lambda_s} - Ei\lambda_s)\, y^{(s)} = 0$, а $\bar{y}^{(s)}$ — вектор, комплексно сопряженный с $y^{(s)}$.

Ставится задача: при каких условиях, наложенных на параметры системы (1), и достаточно малых значениях ε она будет иметь семейство асимптотических квазипериодических решений, близкое к семейству (4).

Опираясь на асимптотический метод [1] и идею Пуанкаре—Ляпунова о разложимости решений в степенной ряд по малому параметру [2], ниже приведем простую схему получения таких решений и условие их существования.

Аналогичная задача для автономной системы с запаздыванием решена в [3].

2. Пусть n — наименьшее кратное из чисел n_t $(t = R + 1, \ldots, S)$. Положив $t = n\tau$, систему (1) перепишем так:

$$\frac{1}{n} \frac{dx}{d\tau} = Ax + Bx_\Delta + \varepsilon F(x, x_\Delta, n\nu\tau). \quad (5)$$

Порождающая система будет иметь вид

$$\frac{1}{n} \frac{dx}{d\tau} = Ax + Bx_\Delta. \quad (6)$$

Запишем семейство квазипериодических решений для системы (6):

$$x = \sum_{r=1}^{R} a_r^{(0)} \left(y^{(r)} e^{i(n\lambda_r \tau + \alpha_r^{(0)})} + \bar{y}^{(r)} e^{-i(n\lambda_r \tau + \alpha_r^{(0)})}\right) +$$

$$+ \sum_{t=R+1}^{S} a_t^{(0)} \left(y^{(t)} e^{i[m_t((p^{(t)},\lambda)+(q^{(t)},\nu))\tau + \alpha_t^{(0)}]} + \bar{y}^{(t)} e^{-i[m_t((p^{(t)},\lambda)+(q^{(t)},\nu))\tau + \alpha_t^{(0)}]}\right), \quad (7)$$

где $m_t = \frac{n}{n_t}$ — целое число.

3. При сделанных предположениях семейство асимптотических квазипериодических решений системы (5), близкое к семейству решений (7), будем отыскивать в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^{(n)}(\psi, \theta), \tag{8}$$

где

$$u^{(0)}(\psi, \theta) = \sum_{r=1}^{R} a_r \left(y^{(r)} e^{in\psi_r} + \bar{y}^{(r)} e^{-in\psi_r}\right) + \sum_{t=R+1}^{S} a_t \left(y^{(t)} e^{i[m_t((p^{(t)},\psi)+(q^{(t)},\theta))+\alpha_t]} + \right.$$

$$\left. + \bar{y}^{(t)} e^{-i[m_t((p^{(t)},\psi)+(q^{(t)},\theta))+\alpha_t]}\right), \tag{9}$$

$$\psi = \omega\tau + \psi_0 = \left(\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h^{(n)}\right)\tau + \psi_0, \quad \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_R), \ \theta = \nu\tau,$$

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_M), \quad a = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a^{(n)}, \quad a = (a_1, \ldots, a_S),$$

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \alpha^{(n)}, \ \alpha = (\alpha_{R+1}, \ldots, \alpha_S),$$

$u^{(n)}(\psi, \theta)$ — ограниченная периодическая по ψ, θ периода 2π векторная функция, не содержащая в себе разложение вида (9). Здесь $u^{(n)}(\psi, \theta)$, $a^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$, $h^{(n)}$ — величины, подлежащие определению.

Для определения указанных величин подставляем (8) в систему (5) и разлагаем обе части полученных равенств по степеням ε. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем системы уравнений:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \psi}\lambda + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \theta}\nu\right) = Au^{(1)} + Bu_\Delta^{(1)} - \frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(1)} + F^{(0)}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \psi}\lambda + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \theta}\nu\right) = Au^{(2)} + Bu_\Delta^{(2)} - \frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(2)} -$$

$$- \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial a^{(0)}}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(1)} a^{(1)} - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \alpha^{(0)}}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(1)} \alpha^{(1)} +$$

$$+ \Phi^{(1)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial a^{(0)}} a^{(1)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \alpha^{(0)}} \alpha^{(1)}, \tag{11}$$

. . . .

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial \psi}\lambda + \frac{\partial u^{(m)}}{\partial \theta}\nu\right) = Au^{(m)} + Bu_\Delta^{(m)} - \frac{1}{n}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(m)} -$$

$$- \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial a^{(0)}}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(1)} a^{(m-1)} - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \alpha^{(0)}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} + \Delta B \frac{\partial u_\Delta^{(0)}}{\partial \psi}\right) h^{(1)} \alpha^{(m-1)} + \Phi^{(m-1)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial a^{(0)}} a^{(m-1)} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \alpha^{(0)}} \alpha^{(m-1)}, \tag{12}$$

. . . .

где

$$F^{(0)} = F(x, x_\Delta, n\nu\tau)\,|_{x=u^{(0)}, x_\Delta = u_\Delta^{(0)}, \varepsilon=0}, \quad u^{(m)} = u^{(m)}(\psi, \theta)\,|_{\varepsilon=0},$$

$$u_\Delta^{(m)} = u^{(m)}(\psi, \theta)\,\Big|_{\psi=\psi-\frac{\Delta\lambda}{n}, \theta=\theta-\frac{\Delta\nu}{n}, \varepsilon=0},$$

$\Phi^{(m-1)}$ — известная функция, зависящая от величин $u^{(l-1)}$, $\alpha^{(l-2)}$, $a^{(l-2)}$, $h^{(l-1)}$ $(l \leqslant m-1)$.

Разложим функцию $F^{(0)}$ в системе уравнений (10) в ряд Фурье по аргументам ψ, θ:

$$F^{(0)} = \sum_{k,l} F^{(0)}_{k,l}(a^{(0)}, \alpha^{(0)})\, e^{i((k,\psi)+(l,\theta))}. \tag{13}$$

Функцию $u^{(1)}$ также отыскиваем в виде ряда

$$u^{(1)} = \sum_{k,l} u^{(1)}_{k,l}(a^{(0)}, \alpha^{(0)})\, e^{i((k,\psi)+(l,\theta))}. \tag{14}$$

Подставляя разложения (13), (14) в систему (10) и приравнивая коэффициенты у подобных членов, получаем системы уравнений для определения коэффициентов $u^{(1)}_{k,l}$:

$$\left(A + Be^{-\frac{i\Delta}{n}((k,\lambda)+(l,\nu))} - E\frac{i}{n}((k,\lambda)+(l,\nu))\right) u^{(1)}_{k,l} = -F^{(0)}_{k,l} \tag{15}$$

для k, l, удовлетворяющих неравенствам $\frac{1}{n}((k,\lambda)+(l,\nu)) \neq \lambda_s$,

$$(A + Be^{-i\Delta\lambda_r} - Ei\lambda_r)\, u^{(1)}_{r,0} = -F^{(0)}_{r,0} + a^{(0)}_r h^{(1)}_r i\,(E + \Delta e^{-i\Delta\lambda_r}B)\, y^{(r)} \quad (r = 1, \ldots, R), \tag{16}$$

$$(A + Be^{-i\Delta\lambda_t} - Ei\lambda_t)\, u^{(1)}_{p^{(t)},q^{(t)}} = -F^{(0)}_{p^{(t)},q^{(t)}} +$$
$$+ \frac{a^{(0)}_t}{n_t}(p^{(t)}, h^{(1)})\, ie^{i\alpha^{(0)}_t}(E + \Delta e^{-i\Delta\lambda_t}B)\, y^{(t)} \quad (t = R+1, \ldots, S). \tag{17}$$

Согласно предположению основные определители в системах (15) отличны от нуля и потому они однозначно разрешимы. В системах (16), (17) основные определители равны нулю. Поэтому они разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части удовлетворяют равенствам

$$a^{(0)}_r h^{(1)}_r i\,(1 + \Delta e^{-i\Delta\lambda_r}(By^{(r)}, y^{(r)}_*)) = (F^{(0)}_{r,0}, y^{(r)}_*) \quad (r = 1, \ldots, R), \tag{18}$$

$$\frac{a^{(0)}_t}{n_t}(p^{(t)}, h^{(1)})\, ie^{i\alpha^{(0)}_t}(1 + \Delta e^{-i\Delta\lambda_t}(By^{(t)}, y^{(t)}_*)) = (F^{(0)}_{p^{(t)},q^{(t)}}, y^{(t)}_*) \quad (t = R+1, \ldots, S), \tag{19}$$

где $y^{(s)}_*$ — собственный вектор, удовлетворяющий условию нормировки $(y^{(s)}, y^{(s)}_*) = 1$ и системе уравнений $(A' + B'e^{i\Delta\lambda_s} + Ei\lambda_s)\, y^{(s)}_* = 0$. Здесь A', B' — транспонированные матрицы к A, B.

Отделяя вещественную и мнимую части в равенствах (18), (19) и выполняя некоторые несложные вычисления, получаем, что система уравнений (10) имеет семейство решений нужного нам вида, когда $a^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$ удовлетворяют равенствам

$$X_r = P^{(1)}_r + \Delta(P^{(1)}_r Q^{(2)}_r - P^{(2)}_r Q^{(1)}_r) = 0 \quad (r = 1, \ldots, R), \tag{20}$$

$$Y_t = P^{(1)}_t((1 + \Delta Q^{(2)}_t)\cos\alpha^{(0)}_t + \Delta Q^{(1)}_t \sin\alpha^{(0)}_t) +$$
$$+ P^{(2)}_t((1 + \Delta Q^{(2)}_t)\sin\alpha^{(0)}_t - \Delta Q^{(1)}_t\cos\alpha^{(0)}_t) = 0, \tag{21}$$

$$Z_t = P^{(1)}_t + \frac{a^{(0)}_t}{n_t}((1 + \Delta Q^{(2)}_t)\sin\alpha^{(0)}_t - \Delta Q^{(1)}_t\cos\alpha^{(0)}_t) \sum_{r=1}^{R} \frac{p^{(t)}_r P^{(2)}_r}{a^{(0)}_r(1 + \Delta Q^{(2)}_t)} = 0.$$
$$(t = R+1, \ldots, S), \tag{22}$$

где $(F^{(0)}_{r,0}, y^{(r)}_*) = P^{(1)}_r + iP^{(2)}_r$, $(F^{(0)}_{p^{(t)},q^{(t)}}, y^{(t)}_*) = P^{(1)}_t + iP^{(2)}_t$, $i\,(By^{(s)}, y^{(s)}_*)\, e^{i\Delta\lambda_s} = Q^{(1)}_s + iQ^{(2)}_s$.

Исключив величины $\alpha^{(0)}$ из последних уравнений, получим зависимости между амплитудами колебаний и частотами внешней силы. Это амплитудно-частотные уравнения для резонансных колебаний. Значение $h^{(1)}$ определим, как только найдем величины $a^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что система уравнений (12) допускает периодическое по ψ, θ с периодом 2π решение тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$(a_r^{(0)}h_r^{(m)} + a_r^{(m-1)}h_r^{(1)})(1 + \Delta e^{-i\Delta\lambda_r}(By^{(r)}, y_*^{(r)}))\, i =$$

$$= \left(\Phi_{r,0}^{(m-1)} + \frac{\partial F_{r,0}^{(0)}}{\partial a^{(0)}} a^{(m-1)} + \frac{\partial F_{r,0}^{(0)}}{\partial \alpha^{(0)}} \alpha^{(m-1)}, y_*^{(r)}\right) \quad (r = 1, \ldots, R), \tag{23}$$

$$[-a_t^{(0)}(p^{(t)}, h^{(1)})\alpha_t^{(m-1)} + a_t^{(0)}(p^{(t)}, h^{(m)})\, i + a_t^{(m-1)}(p^{(t)}, h^{(1)})\, i] \times$$

$$\times (1 + (By^{(t)}, y_*^{(t)})\Delta e^{-i\Delta\lambda_t}) \frac{e^{i\alpha_t^{(0)}}}{n_t} = \left(\Phi_{p^{(t)},q^{(t)}}^{(m-1)} + \frac{\partial F_{p^{(t)},q^{(t)}}^{(0)}}{\partial a^{(0)}} a^{(m-1)} + \frac{\partial F_{p^{(t)},q^{(t)}}^{(0)}}{\partial \alpha^{(0)}} \times\right.$$

$$\left. \times\, \alpha^{(m-1)}, \ y_*^{(t)}\right) (t = R+1, \ldots, S). \tag{24}$$

Отделяя в равенствах (23), (24) вещественные и мнимые части и исключая величины $h^{(m)}$, получаем систему уравнений для определения $a^{(m-1)}$, $\alpha^{(m-1)}$:

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial X_r}{\partial a_s^{(0)}} a_s^{(m-1)} + \sum_{j=R+1}^{S} \frac{\partial X_r}{\partial \alpha_j^{(0)}} \alpha_j^{(m-1)} = X_r^* \quad (r = 1, \ldots, R),$$

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial Y_t}{\partial a_s^{(0)}} a_s^{(m-1)} + \sum_{j=R+1}^{S} \frac{\partial Y_t}{\partial \alpha_j^{(0)}} \alpha_j^{(m-1)} = Y_t^*,$$

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\partial Z_t}{\partial a_s^{(0)}} a_s^{(m-1)} + \sum_{j=R+1}^{S} \frac{\partial Z_t}{\partial \alpha_j^{(0)}} \alpha_j^{(m-1)} = Z_t^* \quad (t = R+1, \ldots, S), \tag{25}$$

где X_r^*, Y_t^*, Z_t^* — известные величины.

Система (25) — линейная неоднородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных a^{m-1}, α^{m-1} с определителем

$$\Delta_* = \left| \frac{\partial (X_r, Y_t, Z_t)}{\partial (a_s^{(0)}, \alpha_t^{(0)})} \right|.$$

Таким образом, она однозначно разрешима относительно $a^{(m-1)}$, $\alpha^{(m-1)}$, лишь только

$$\Delta_* \neq 0. \tag{26}$$

Из неравенства (26) можно найти $a^{(m-1)}$, $\alpha^{(m-1)}$, а также и $h^{(m)}$ и тем самым доказать существование периодических по ψ, θ периода 2π функций $u^{(m)}$.

По индукции можно сделать заключение о справедливости следующей теоремы.

Теорема. *Пусть система уравнений* (5) *такова, что система уравнений* (20) — (22) *имеет решение* $a^{(0)}, \alpha^{(0)}$, *удовлетворяющее условиям* $a_r^{(0)} \neq 0$ $(r = 1, \ldots, R)$, $\Delta_* \neq 0$. *Тогда можно так выбрать* $a^{(m)}, \alpha^{(m)}, h^{(m)}$, *чтобы система уравнений* (5) *имела семейство асимптотических квазипериодических решений* (8) *с частотным базисом* $\omega_1, \ldots, \omega_R, \nu_1, \ldots \nu_M$, *близкое к семейству решений* (7) *при достаточно малых значениях* ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.— 491 с.
3. Ле суан Кан. Асимптотические разложения квазипериодических решений в квазилинейных автономных системах с запаздыванием.— В кн.: Качественные исследования дифференциально-разностных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
19.XI 1979 г.