УДК 517.948.22

Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк,
В. А. Данканич

Метод Галеркина в теории квазипериодических решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta))\, y(t) -$$

$$- b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta))\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta)), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{1}$$

где $a(\varphi, \psi, y, z)$, $b(\varphi, \psi, y, z)$ — $(s \times s)$-мерные матрицы, $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $c = (c_1, \ldots, c_s)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — базис частот.

При изучении квазипериодических решений системы (1) будем применять метод Галеркина, позволяющий построить квазипериодическое решение как предел последовательности тригонометрических полиномов

$$u_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} u_N^{(n)} \exp(i(n, \varphi)), \quad N = 0, 1, 2, \ldots .$$

Отметим, что обоснование этого метода для систем обыкновенных дифференциальных уравнений дано в работе [1], а в периодическом случае ($m = 1$) для систем с запаздыванием — в [2]. Предположим, что система (1) имеет квазипериодическое решение $y = u(\varphi) = u(\omega t)$ и функция $u(\varphi)$ непрерывно дифференцируема. Тогда известно, что $u(\varphi)$ будет периодическим по φ с периодом 2π решением уравнения

$$L(u)\,u = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))\, u(\varphi) +$$

$$+ b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))\, u(\varphi - \omega\Delta) = c(\varphi, \varphi - \omega\Delta). \tag{2}$$

Таким образом, вопрос о нахождении квазипериодических решений системы (1) сводится к вопросу о периодических решениях системы уравнений (2).

В дальнейшем через $\mathfrak{T}_m$ будем обозначать m-мерный тор, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — координаты на нем. Через $C^r(\mathfrak{M})$ обозначим класс вектор-функций $f(\varphi, \psi, y, z)$, определенных на некотором компакте $\mathfrak{M}$, периодических по φ, ψ с периодом 2π, имеющих непрерывные частные производные по φ, ψ, y, z порядка r. Введя в $C^r(\mathfrak{M})$ норму $|f(\varphi, \psi, y, z)|_r = \max_{0 \leqslant |\rho| \leqslant r} \| D^\rho f(\varphi, \psi, y, z)\|_0$, где $D^\rho f$ — произвольная производная порядка ρ,

$$\| u(\varphi, \psi, y, z)\|_0 = \max_{\mathfrak{M}} \| f(\varphi, \psi, y, z)\|, \quad \| f \| = \left(\sum_{i=1}^{s} f_i^2 \right)^{1/2},$$

обратим его в пространство Банаха.

Множество тригонометрических вещественных полиномов вида

$$P(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} P^{(n)} e^{i(n,\varphi)}, \quad P^{(n)} = \bar{P}^{(-n)}, \quad P = (P_1, \ldots, P_s),$$

обозначим через $T(\mathfrak{T}_m)$. Для $r > 0$, $P \in T(\mathfrak{T}_m)$, $Q \in T(\mathfrak{T}_m)$ через

$$(P, Q)_r = \sum_n (1 + \| n \|^2)^r < P^{(n)}, Q^{(-n)} > \tag{3}$$

обозначим скалярное произведение полиномов $P(\varphi)$ и $Q(\varphi)$. Произведение (3) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, поэтому определяет норму $\| P \|_r^2 = (P, P)_r$.

Рассматривая оператор $k = 1 - \Delta_1$, $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{(\partial \varphi_i)^2}$, можно заметить, что

$$(P, Q)_r = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} < (1 - \Delta_1)^r P, Q > d\varphi. \tag{4}$$

Пополняя пространство $T(\mathfrak{T}_m)$ по норме $\|\cdot\|_r$, получим гильбертово пространство $H^r(\mathfrak{T}_m)$. Известно, что пространство $H^0(\mathfrak{T}_m)$ можно отождествлять с пространством $L_2(\mathfrak{T}_m)$ интегрируемых с квадратом функций со скалярным произведением (4) при $r = 0$. Если $f(\varphi) \in L_2(\mathfrak{T}_m)$, то через S_N обозначим оператор, ставящий в соответствие $f(\varphi)$ отрезок ее ряда Фурье длины N:

$$S_N f(\varphi) = \sum_{\|n\| < N} f^{(n)} e^{i(n,\varphi)}, \quad f^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-i(n,\varphi)} d\varphi.$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$L = L_1 + L_\Delta^1, \tag{5}$$

где $L_1 = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi - \omega\Delta)$, $L_\Delta^1 u(\varphi) = b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)\, u(\varphi - \omega\Delta)$, $a(\varphi, \psi)$, $b(\varphi, \psi)$ — $(s \times s)$-мерные матрицы. Предположим, что $a(\varphi, \psi)$, $b(\varphi, \psi) \in C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$ и существуют постоянные γ_0, γ_1, такие, что выполняются неравенства $\langle a(\varphi, \psi)\eta, \eta\rangle \geqslant 2\gamma_0 > 0$, $2C_r |b(\varphi, \psi)|_r < \gamma_1$, $|b(\varphi, \psi)|_0 < \gamma_0$, где $|b(\varphi, \psi)|_r = \max_{|u|_r = 1} |bu|_r$, C_r — положительная величина, смысл которой будет указан ниже. Тогда, применяя неравенство Шварца, для оператора L получим оценки

$$(Lu, u)_0 \geqslant (2\gamma_0 - |b(\varphi, \psi)|_0) \| u \|_0^2, \quad (Lu, u)_r \geqslant (2\gamma_1 - C_r |b(\varphi, \psi)|_r) \| u \|_r^2 - - \delta_1 (1 + \| a \|_r)^2. \tag{6}$$

Рассмотрим систему

$$L(\varepsilon u)\,u = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon u(\varphi), \varepsilon u(\varphi - \omega\Delta))\, u(\varphi) +$$

$$+ b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon u(\varphi), \varepsilon u(\varphi - \omega\Delta))\, u(\varphi - \omega\Delta) = c(\varphi, \varphi - \omega\Delta), \qquad (7)$$

которая следует из системы (2) в результате замены u, c соответственно на εu, εc, ε—малый вещественный параметр. Предположим, что $a(\varphi, \psi, y, z)$, $b(\varphi, \psi, y, z)$ принадлежат классу $C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m \times D_d \times D_d)$, $D_d = \{y : \|y\| \leqslant \leqslant d\}$, $c(\varphi, \psi)$ — s-мерная вектор-функция класса $H^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$, $r > \frac{m}{2} + 2$.

Имеет место такая теорема.

Теорема. *Пусть для оператора $L(\varepsilon u)$ существуют положительные числа C_r, γ_0, γ_1 такие, что для любого вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$, $\|\eta\| = 1$ имеют место неравенства*

$$\langle a(\varphi, \psi, 0, 0)\eta, \eta\rangle \geqslant 2\gamma_0, \quad |b(\varphi, \psi, 0, 0)|_0 < \gamma_0, \quad 2C_r|b(\varphi, \psi, 0, 0)|_r < \gamma_1. \qquad (8)$$

Тогда существуют такие положительные числа ε_0, K, c_0, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\|c(\varphi, \psi)\|_r \leqslant K$ система уравнений

$$S_N(\varepsilon u_N(\varphi))\, u_N(\varphi) = S_N c(\varphi, \psi), \qquad (9)$$

где $u_N(\varphi) = \sum\limits_{\|n\| \leqslant N} u_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$, *имеет решение при произвольном* $N \geqslant 1$.

Это решение находится с помощью итерационного процесса

$$S_N(L(\varepsilon u_N^{j-1}(\varphi))\, u_N^j(\varphi)) = S_N c(\varphi, \psi), \quad u_N^0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots. \qquad (10)$$

Последовательность $u_N(\varphi)$ сходится по норме пространства $C^k(\mathfrak{T}_m)$ $\left(k = \left[r - 2 - \frac{m}{2}\right] \geqslant 1\right.$ при $N \to \infty$ к функции $u^0(\varphi)$, являющейся классическим решением уравнения (7).

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $L(\varepsilon w)$, где $w(\varphi) \in C(\mathfrak{T}_m)$, $|w(\varphi)|_2 < 1$, предполагая, что $L(0)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть $|\varepsilon w(\varphi)|_0 \leqslant d$. Тогда

$$\begin{aligned} &|a(\varphi, \psi, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta)) - a(\varphi, \psi, 0, 0)|_0 \leqslant 2\varepsilon s |a|_1, \\ &|b(\varphi, \psi, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta)) - b(\varphi, \psi, 0, 0)|_0 \leqslant 2\varepsilon s |b|_1 \end{aligned} \qquad (11)$$

и при достаточно малом ε_0 выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\langle a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - w\Delta))\eta, \eta\rangle > 2\gamma_0, \\ &|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))|_0 < \gamma_0, \end{aligned} \qquad (12)$$

откуда следует, что оператор $L(\varepsilon w)$ удовлетворяет неравенствам (6) для всех $u(\varphi) \in C^2(\mathfrak{T}_m) \cap H^r(\mathfrak{T}_m)$, $|u(\varphi)|_2 < 1$. Согласно лемме из [3] существуют такие постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависящие от a, b, ω, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &|a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))|_r \leqslant c_1|a|_r(1 + \varepsilon\|w\|_r), \\ &|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))|_r \leqslant c_2|b|_r(1 + \varepsilon\|w\|_r), \end{aligned} \qquad (13)$$

в силу которых из неравенства (6) получаем неравенство

$$(L(\varepsilon\omega(\varphi))\,u, u)_r \geqslant (2\gamma_1 - c_2 c_r\,|\,b\,|_r\,(1+\varepsilon\,\|\,w(\varphi)\,\|_r)\,\|\,u\,\|_r^2 - \delta_2\,(1+\varepsilon\,\|\,w(\varphi)\,\|_r)^2,$$
$$2c_2 c_r\,|\,b\,|_r < \gamma_1, \tag{14}$$

где δ_2 не зависит от $u(\varphi)$, $w(\varphi)$.

Предположим, что полином $w_N^{j-1}(\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\|\,w_N^{j-1}(\varphi)\,\|_0 \leqslant \frac{\|\,c(\varphi,\psi)\,\|_0}{2\gamma_0 - |\,b\,|_0}, \quad \|\,w_N^{j-1}(\varphi)\,\|_r \leqslant \delta\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{j-1}}\right) < 2\delta,$$
$$|\,w_N^{j-1}(\varphi)\,|_2 < 1, \quad \text{где } \delta = 3\sqrt{\frac{\delta_2}{2\gamma_1 - |\,b\,|_0}}\,. \tag{15}$$

Согласно неравенствам (15) оператор $L(\varepsilon w_N^{j-1}(\varphi)$ удовлетворяет неравенствам (6) и (14). Кроме того, легко показать, что при $S_N c(\varphi,\psi) = 0$ однородная система (10) имеет лишь тривиальное решение $w_N^j(\varphi) = 0$. Следовательно, система (10) всегда имеет решение и из (6) и неравенства Шварца легко получить оценку

$$\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_0 \leqslant \frac{\|\,c(\varphi,\psi)\,\|_0}{2\gamma_0 - |\,b\,|_0}\,. \tag{16}$$

Аналогично из неравенства (14) получаем соотношение

$$(2\gamma_1 - c_2 c_r\,|\,b\,|_r\,(1+\|\,w_N^{j-1}(\varphi)\,\|_r))\,\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_r^2 - \delta_2\,(1+\varepsilon\,\|\,w_N^{j-1}(\varphi)\,\|_r)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\,c\,\|_r\,\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_r, \tag{17}$$

из которого следует оценка

$$\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_r \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\,c\,\|_r + \sqrt{\|\,c\,\|_r^2 + 4\,(2\gamma_1 - c_2 c_r\,|\,b\,|_r\,(1+\varepsilon\,\|\,w_N^{j-1}\,\|_r)\,\delta_2\,(1+\varepsilon\,\|\,w_N^{j-1}\,\|_r))^2}}{2\,(2\gamma_1 - c_2 c_r\,|\,b\,|_r\,(1+\varepsilon\,\|\,w_N^{j-1}\,\|_r))}\,,$$

если $\|\,c\,\|_r \leqslant 2\sqrt{\gamma_1\delta_2}$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 2\delta$. Согласно теореме Соболева о вложении и компактности, имеем оценку

$$|\,w_N^j(\varphi)\,|_r \leqslant c_3\,\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_{r-1} \leqslant 2c_3\,\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_0^{1-\frac{r-1}{r}}\,\|\,w_N^j(\varphi)\,\|_r^{\frac{r-1}{r}} \leqslant$$
$$\leqslant 2c_3\left(\frac{\|\,c(\varphi,\psi)\,\|_0}{2\gamma_0 - |\,b\,|_0}\right)^{\frac{1}{r}}(2\delta)^{\frac{r-1}{r}} < 1$$

при достаточно малом $\|\,c(\varphi,\psi)\,\|_0$.

Докажем сходимость $w_N^j(\varphi)$ при $j\to\infty$. Обозначив $v_N^{j+1} = w_N^{j+1} - w_N^j$, получим $S_N(L(\varepsilon w_N^j)\,v_N^{j+1}) = S_N((L(\varepsilon w_N^{j-1}) - L(\varepsilon w_N^j))\,w_N^j)$, откуда с помощью неравенства (6) имеем

$$\|\,v_N^{j+1}\,\|_0 \leqslant \frac{\|\,S_N((L(\varepsilon w_N^{j-1}) - L(\varepsilon w_N^j))\,w_N^j)\,\|_0}{2\gamma_0 - |\,b\,|_0} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\frac{|\,a(\varphi,\psi,0,0)\,|_0 + |\,b(\varphi,\psi,0,0)\,|_0}{2\gamma_0 - |\,b\,|_0}\right)\|\,w_N^j\,\|_0.$$

Из последнего неравенства при достаточно малом ε_0 последовательность $w_N^j(\varphi)$ фундаментальна в $H^0(\mathfrak{T}_m)$.

Докажем сходимость $w_N(\varphi)$ в $H^0(\mathfrak{T}_m)$ при $N \to \infty$. Оценивая $w_{N+1}(\varphi) - w_N(\varphi)$, получаем оценку

$$\| w_{N+1}(\varphi) - w_N(\varphi) \|_0 \leqslant 2c_4 N^{-(r-1)}, \tag{18}$$

откуда следует сходимость $w_N(\varphi)$ в $H^0(\mathfrak{T}_m)$, так как $r > \frac{m}{2} + 2$.

Последовательность $w_N(\varphi)$ — сходящаяся в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$, так как в противном случае существовало бы две последовательности, сходящиеся в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$ к различным функциям. Это невозможно, поскольку ряды Фурье этих функций совпадают. Следовательно, последовательность $w_N(\varphi)$ сходится в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$, а значит, в $C^k(\mathfrak{T}_m)$, $k = \left[r - 2 - \frac{m}{2} \right] > 1$, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М., Парасюк І. О. Про метод Гальоркіна в теорії збурень інваріантних торів.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 2, с. 112—115.
2. Алиев Р. М. Применение метода Галеркина к решению уравнений с запаздывающим аргументом. — Изв. АН АзССР. Сер. физ-техн. и мат. наук, 1964, № 1, с. 3—6.
3. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— Успехи мат. наук, 1968, 23, № 4, с. 179—238.

Институт математики АН УССР
Киевский государственный университет
Ужгородский государственный университет

Поступила в редакцию
26.XI 1979 г.