УДК 517.54

А. А. Беспальцев

Обобщенное аналитическое продолжение по симметрии

1. При изучении линейных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой [1, 2], возникает необходимость рассмотреть аналитические функции $f(z)$ в области $K_+ = \{z \,|\, |z| < 1\}$, которые продолжаются в область $K_- = \{z \,|\, |z| > 1\}$ формулой

$$f(z)\,\bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 1, \quad |z| < 1. \tag{1}$$

Продолжаемая таким образом функция, очевидно, аналитическая в области K_-. Если аналитическая функция непрерывна на окружности $|\zeta| = 1$ и $|f(\zeta)| = 1$, то $f(z)$ продолжается аналитически через окружность $|\zeta| = 1$ по симметрии (принцип Шварца) соотношением (1).

В большинстве важных обобщений принципа симметрии Шварца условие непрерывности $f(\zeta)$ на $|\zeta| = 1$ заменяется более слабым требованием существования почти всюду (п. в.) на $|\zeta| = 1$ радиальных пределов $f(z)$, по модулю равных единице.

Обобщение Неванлинны [3]. Пусть $|f(z)| < 1$, $|z| < 1$, $\lim |f(re^{i\varphi})| = 1$, $r \to 1$, (п. в) $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, тогда либо $f(z)$ аналитически продолжается через окружность, либо точка $f(e^{i\varphi})$, $f(e^{i\varphi}) = \lim f(re^{i\varphi})$, $r \to 1$, пробегает окружность $|w| = 1$ бесконечное число раз.

Обобщение Зейделя [4]. Если $f(z)$ имеет особенность на γ, то при тех же условиях на функцию $f(z)$ каждая точка окружности $|w| = 1$ — радиальный предел $f(z)$ на γ.

Для произведения Бляшке $B(z)$, для которого каждая точка окружности $|\zeta| = 1$ — предел некоторой подпоследовательности чисел $\{a_k\}_1^\infty$, где a_k — нули произведения, единичная окружность является естественной границей, т. е. $B(z)$ нельзя аналитически продолжить ни через какую дугу окружности $|\zeta| = 1$, с другой стороны, нетрудно показать, что если $b(z) = 1/\overline{B}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$, то $b(z)$ вполне определено и представляет мероморфную функцию в K_-: $\lim\limits_{r\to 1+0} b(z) = \lim\limits_{r\to 1-0} B(z)$, (п. в.) $|\zeta| = 1$.

Таким образом, $B(z)$ определяет $b(z)$ единственным образом и наоборот. В связи с этим и другими примерами в [5] было высказано пожелание об определении и развитии некоего «обобщенного аналитического продолжения».

2. Пусть $f(z)$ определена в K_+. Предельным множеством $C(f, P)$ функции $f(z)$ в точке P, $|P| = 1$ (см., например, [6]) называется множество, удовлетворяющее соотношению

$$C(f, P) = \{\alpha \,|\, \exists \{z_n\},\ z_n \in K_+,\ \lim_{n\to\infty} z_n = P,\ \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha\}.$$

Обозначим через $C_r(f, P)$ радиальный предел функции $f(z)$ в точке P, т. е. $C_r(f, P) = \{\alpha \,|\, \lim\limits_{r\to 1} f(rP) = \alpha\}$. Для внутренних функций справедлива теорема Зейделя [7].

Теорема 1. *Пусть* $f(z)$ — *внутренняя функция в* K_+, *т. е.* $|f(z)|<1$, $|f(e^{i\varphi})|=1$ *почти всюду на некоторой дуге* γ *единичной окружности, где* $f(e^{i\varphi})=\lim f(re^{i\varphi})$, $r\to 1$. *Тогда в каждой особой точке* P, $|P|=1$, *функции* $f(z)$ *на дуге* γ *предельное множество* $C(f, P)$ *представляет собой замкнутый круг* $|w|\leqslant 1$.

Рассмотрим аналитические матрицы-функции $A(z)$ в K_+, элементами которых являются аналитические функции в K_+.

Определение 1. Предельным множеством $C(A, P)$ матрицы $A(z)$ в точке P, $|P|=1$ называется множество, удовлетворяющее соотношению $\mathbf{A}\in C(A, P)$, если $\exists\,\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=P$, $\lim\limits_{n\to\infty} A(z_n)=\mathbf{A}$.

Предельное множество, состоящее из одной точки (матрицы), назовем вырожденным. Обозначим $C_r(A, P)$ радиальный предел матрицы-функции $A(z)$ в точке P, т. е. $C_r(A, P)=\{\mathbf{A}\mid \lim A(rP)=\mathbf{A},\ r\to 1\}$.

Определение 2. Множество $D_0\subset D$, где D — замкнутый матричный круг, т. е. $D=\{\mathbf{A}/\mathbf{A}\mathbf{A}^*\leqslant I\}$, называется замкнутым матричным 0-кругом, если для каждой матрицы $\mathbf{A}\in D$ $D_0=\{\mathbf{A}+\mathbf{A}_0\mid \mathbf{A}\in D,\ \det \mathbf{A}_0=0,\ \mathbf{A}_0\in D\}$, где матрица $\mathbf{A}_0$ определяется матрицей $\mathbf{A}$ способом, указанным в лемме 1.

Используя $C_r(A, P)$, перенесем на матричный случай теорему 1 о внутренних в K_+ функциях.

Теорема 2. *Пусть* $A(z)$ — *аналитическая матрица-функция в* K_+, $A(z)A^*(z)\leqslant I$ *при* $|z|<1$, *и* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=I$ *почти всюду на* $|\zeta|=1$, *где* $\mathbf{A}=C_r(A, P)$. *Тогда в каждой особой точке* P, $|P|=1$, *матрицы* $A(z)$ *предельное множество* $C(A, P)$ *представляет замкнутый матричный* 0-*круг*.

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если радиальный предел матрицы* $A(z)$ *существует почти всюду на дуге* $\gamma=\{e^{i\theta},\ \theta_1<\theta<\theta_2\}$, *причем* $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=I$, $\mathbf{A}=C_r(A, e^{i\theta})$ *и* P — *особая точка на* γ, *то особенная матрица принадлежит* $C(A, P)$.

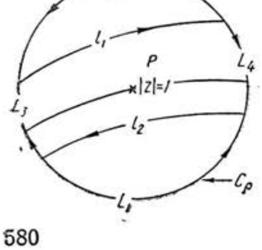
Будем доказывать лемму от противного. Пусть существует положительная матрица B и такое положительное число ρ_1, $\rho_1<1$, что $0<B<A(z)\times A^*(z)<I$ для всех z из общей части круга V_{ρ_1} и круга $|z|<1$, $V_{\rho_1}=\{z\mid |z-P|<\rho_1\}$.

Так как радиальные пределы матрицы $A(z)$ существуют почти всюду на дуге γ, можно найти ρ, $\rho<\rho_1$, такое, что предельные матрицы, унитарные, существуют в обеих точках пересечения окружности $C_\rho=\{z\mid |z-P|=\rho\}$ с окружностью $|z|=1$ при стремлении z к каждой из точек вдоль C_ρ. Определим на C_ρ матрицу-функцию $F(z)$:

$$F(z)=\begin{cases} A(z), & |z|<1,\\ A^{*(-1)}\left(\dfrac{1}{\bar z}\right), & |z|>1.\end{cases}$$

Тогда матрица-функция $C(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_\rho}\dfrac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ аналитична в $|z-P|<\rho$.

Окружности $|z|=1\pm\varepsilon$ разбивают $|z-P|<\rho$ на три области (см. рисунок, где $l_1: |z|=1+\varepsilon$; $l_2: |z|=1-\varepsilon$). Поэтому разбиваем интеграл по C_ρ на слагаемые:



$$\int\limits_{C_\rho}=\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}+\int\limits_{L_3}+\int\limits_{L_4}=\int\limits_{\Gamma_1}+\int\limits_{\Gamma_2}+\int\limits_{\Gamma_3},$$

где $\Gamma_1=L_1+l_2$, $\Gamma_3=L_2+l_1$, $\Gamma_2=l_1+l_2+L_3+L_4$.

Покажем, что $C(z)$ совпадает с $A(z)$ в общей части V_ρ и $|z|<1$ и с $A^{*(-1)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ в общей части V_ρ и $|z|>1$. Интеграл по Γ_1 равен $A(z_0)$, если $|z_0|<1-\varepsilon$, $z_0\in V_\rho$. Интеграл по Γ_3 равен нулю, так как z_0 лежит внутри Γ_1 и вне Γ_3. Покажем, что интеграл по Γ_2 стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Это очевидно для интегралов по отрезкам, соединяющим концы дуг L_1 и L_2. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{l_1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta-\int\limits_{l_2}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta\right)\to$$

$$\to\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z_0}\,[A^{*(-1)}(re^{i\varphi})-A(re^{i\varphi})]\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z_0}\,[I-A(z)A^*(z)]\,(A(z)A^*(z))^{-1}\cdot A(z)\,d\varphi,\quad z=re^{i\varphi}.$$

Так как $(A^{*(-1)}-A)A^*A^{*(-1)}=(I-AA^*)A^{*(-1)}$ и $0<B<A(z)A^*(z)<I$ для всех $z\in V_\rho$, $B=B^*$, то $(A(z)A^*(z))^{-1}<B^{-1}$ или $\|(A(z)A^*(z))^{-1}\|\leqslant\leqslant\|B^{-1}\|$. Поэтому $\|(I-A(z)A^*(z))(A(z)A^*(z))^{-1}A(z)\|<C$. Следовательно, семейство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z_0}\,[I-A(z)A^*(z)]\,(A(z)A^*(z))^{-1}\cdot A(z)\,d\varphi$$

представляет семейство равностепенно абсолютно непрерывных функций при $z\in V_\rho$, $\theta_1<\theta<\theta_2$. Поскольку на дуге γ почти всюду $\lim\limits_{r\to 1}A(re^{i\varphi})A^*(re^{i\varphi})=I$, то, как известно [8, 9], при $r\to 1$

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-z_0}\,[I-A(z)A^*(z)]\,(A(z)A^*(z))^{-1}A(z)\,d\varphi\to 0.$$

Значит, $C(z)$ дает аналитическое продолжение через дугу γ, содержащую точку P; таким образом, $A(z)$ аналитична в точке P вопреки условию. Итак, особенная матрица принадлежит $C(A, P)$.

Пусть $\mathbf{A}_1$ — произвольная матрица, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^*<I$, тогда матрицу-функцию $L(A, \mathbf{A}_1)$ определим равенством

$$L(A, \mathbf{A}_1)=(I-\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^*)^{-\frac{1}{2}}(A(z)-\mathbf{A}_1)(I-\mathbf{A}_1^*A(z))^{-1}(I-\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Известно [10], что $L(A, \mathbf{A}_1)$ — общий вид дробно-линейного преобразования матричного круга D на себя. Поэтому $L(A, \mathbf{A}_1)$ имеет особую точку P вместе с $A(z)$. Значит, $C(L, P)$ содержит особенную матрицу $\mathbf{A}_0$ и тогда, очевидно, найдется такая особенная матрица A_0, $A_0\in D$, что ${}_1+A_0\in C(A, P)$.

С л е д с т в и е 1. *Если $e^{i\theta}$ — предельная точка произведения Бляшке — Потапова* (см. [11]), *то* $C(B, e^{i\theta})$ — *замкнутый матричный* 0-*круг, где*

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}U_k\begin{pmatrix}\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_kz}\,\frac{|z_k|}{z_k}\,I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}U_k^{-1},\ U_kU_k^*=I.$$

Действительно, произведение Бляшке — Потапова $B(z)$ имеет радиальную предельную матрицу, равную унитарной матрице почти всюду, поскольку любая предельная точка нулей матрицы $B(z)$ должна быть особой.

3. Для нерастягивающих матриц-функций $A(z)$ в K_+, мультипликативная структура таких матриц исследована в [11], в работах [12, 13] введено понятие «квазипродолжения» из K_+ в K_- с использованием для этого реализации по Дарлингтону матрицы $A(z)$. Воспользуемся результатами [12, 13] для введения следующего определения.

Определение. A-реализацией мероморфной функции в K_+ будем называть представление ее в виде дробно-линейного преобразования

$$f(z) = (a_{11}(z)\varepsilon + a_{12}(z))(a_{21}(z)\varepsilon + a_{22}(z))^{-1}, \tag{2}$$

где ε — постоянное число, $\varepsilon \leqslant 1$, матрица коэффициентов A размера 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}$$

— внутренняя матрица-функция в K_+.

В силу равенства $A^*(\zeta) A(\zeta) = I$ (п. в. $|\zeta| = 1$), для внутренней матрицы-функции $A(z)$ в K_- по «принципу симметрии» определена матрица-функция $\tilde{A}(z) = A^{*(-1)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$. Предельные значения $\tilde{A}(\zeta)$ совпадают почти всюду с предельными значениями $A(\zeta)$: $\lim\limits_{r\downarrow 1} \tilde{A}(r\zeta) = \lim\limits_{r\uparrow 1} A(r\zeta)$ (п. в. $|\zeta| = 1$). Поэтому мероморфная функция $f(z)$, допускающая A-реализацию, продолжима в K_-, причем граничные значения функции $f(\zeta)$ являются одновременно граничными значениями некоторой функции $\tilde{f}(\zeta)$ в K_-, т. е.

$$\lim_{r\uparrow 1} f(r\zeta) = \lim_{r\downarrow 1} \tilde{f}(r\zeta) \quad (\text{п. в. } |\zeta| = 1). \tag{3}$$

Будем говорить в таком случае, что функция $f(z)$ допускает A-продолжение из K_+ в K_-. Напомним, что мероморфная функция $f(z)$ в K_+ называется функцией ограниченной характеристики, если $\sup\limits_{0\leqslant r<1} T(r, f) < \infty$:

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi + \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\, dt + n(0, f)\ln r.$$

По теореме Неванлинны (см., например, [14]), каждая функция с ограниченной характеристикой представима в виде отношения ограниченных голоморфных функций в K_+. Поэтому функция с ограниченной характеристикой однозначно определяется своими граничными значениями, заданными на множестве положительной меры. Класс мероморфных функций с ограниченной характеристикой, допускающий A-продолжение, обозначим $N\Pi$.

Теорема 3. *Для того чтобы мероморфную функцию $f(z)$ можно было A-реализовать, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $f(z) \in N\Pi$.*

Доказательство. Необходимость легко следует из свойств функций с ограниченной характеристикой.

Достаточность. Рассмотрим представление $f(z) = f_1(z) f_2(z) f_3(z)$, где

$|f_1(z)| < 1$, $|f_2^{-1}(z)| < 1$, $\lim\limits_{r\to 1}|f_1(r\zeta)| = 1$, $\lim\limits_{r\to 1}|f_2^{-1}(r\zeta)| = 1$ (п. в. $|\zeta| = 1$),

$$f_3(z)\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z + e^{it}}{z - e^{it}}\ln K(t)\, dt\right], \quad \ln K(t) \in L^1, \quad k(t) > 0.$$

Если $f_3(z) \equiv 1$, то A-реализация (2) получается с $\varepsilon = 1$ и внутренней матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} f_1(z) & 0 \\ 0 & f_2^{-1}(z) \end{pmatrix}.$$

Пусть $f(z) = f_3(z)$, т. е. $f_1(z) \equiv 1$, $f_2(z) \equiv 1$. В таком случае A-реализацию (2) ищем с $\varepsilon = 0$, т. е.

$$f(z) = a_{12}(z)\, a_{22}^{-1}(z). \tag{4}$$

Из того что $A^*(\zeta)\, A(\zeta) = I$, следует, что для блоков матрицы $A(\zeta)$ справедливы равенства

$$|a_{11}(\zeta)|^2 + |a_{21}(\zeta)|^2 = 1, \quad |a_{12}(\zeta)|^2 + |a_{22}(\zeta)|^2 = 1,$$

$$\bar{a}_{11}(\zeta)\, a_{12}(\zeta) + \bar{a}_{21}(\zeta)\, a_{22}(\zeta) = 0.$$

Из (4) получаем равносильную систему

$$1 + |f(\zeta)|^2 = |d(\zeta)|^2, \; a_{21}(\zeta) = -\bar{a}_{22}^{(-1)}(\zeta)\, \bar{a}_{12}(\zeta)\, a_{11}(\zeta),$$

где $d(z) = a_{22}^{(-1)}(z) = \bar{a}_{11}^{(-1)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$.

Из того что $\ln|f(\zeta)| \subset L_1$, следует, что также $\ln(1 + |f(\zeta)|) \subset L_1$, поэтому найдется внешняя функция $\varphi(z)$, $\varphi(0) > 0$ (см. [15]), удовлетворяющая соотношению $1/(1 + |f(\zeta)|^2) = |\varphi(\zeta)|^2$. Следовательно, матрица с блоками

$$a_{11}(z) = \bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \; a_{12}(z) = f(z)\, \varphi(z),$$

$$a_{21}(z) = -\bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \; a_{22}(z) = \varphi(z)$$

— искомая внутренняя матрица-функция $A(z)$.

Пусть мероморфная функция $f(z)$ допускает A-реализацию. Введем для таких функций A-предельное множество функции $f(z)$, $C_A(f, P)$, $|P| = 1$. Для этого положим, что $C_A(f, P) = C(A, P)$, где $A(z)$ — матрица A-реализации $f(z)$.

Из теоремы 2 следует, что $C_A(f, P)$ в каждой особой точке P — замкнутый матричный 0-круг; если точка P не особая, то можно подобрать такую матрицу $A(z)$, что $C_A(f, P) = C_r(A, P) = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = I$.

Для мероморфных функций, допускающих A-реализацию, введем определение обобщенного аналитического продолжения по симметрии.

Определение 3. $f(z)$ допускает обобщенное аналитическое продолжение по симметрии, если 1) $f(z)\, \bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 1$, $|z| < 1$; 2) $C_A(f, P)$ — в каждой точке P, $|P| = 1$ либо замкнутый матричный 0-круг, либо $C_A(f, P) = C_r(A, P) = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = I$.

Если мероморфная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям принципа симметрии Шварца, то $f(z)$ допускает обобщенное аналитическое продолжение по симметрии.

Следствие 2. Класс функций, допускающий обобщенное аналитическое продолжение, является подклассом класса функций с ограниченной характеристикой.

Замечание. Очевидно, что функции, допускающие обобщенное аналитическое продолжение по симметрии и допускающие A-продолжение, совпадают в K_+. Если при A-продолжении $f(z)$ удовлетворяет условию (3), то при обобщенном аналитическом продолжении по симметрии условие (3) в общем случае не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кужель А. В. Характеристичні матриці-функції квазіунітарних операторів довільного рангу в просторі з індефінітною метрикою.— Допов. АН УРСР, 1962, № 9, с. 1135—1138.
2. Кужель А. В. Спектральный анализ ограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой.—ДАН СССР, 1963, **151**, № 4, с. 772—774.
3. Nevanlinna R. Über beschränkte analytiche Funktionen.— Soumalais. tiedeakat. toimituks., 1929, Sar A1, N 23, p. 1—75.
4. Seidel W. On the distribution of values of bounded analytic functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, p. 201—226.
5. Ловатер А. Граничное поведение аналитических функций.— В кн.: Математический анализ. Итоги науки.— М.: ВИНИТИ, 1973, т. 10, с. 1—158.
6. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств.— М.: Мир, 1971.— 312 с.
7. Seidel W. On the cluster values of analytic functions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, p. 1—21.
8. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов.— М.: Мир, 1970.— 431 с.
9. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— М.—Л. : Гостехиздат, 1950.— 336 с.
10. Потапов В. П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций.— Труды Моск. мат. об-ва. 1955, № 4, с. 195—236.
11. Потапов В. П. О голоморфных ограниченных в единичном круге матрицах-функциях.— ДАН СССР, 1950, **72**, № 5, с. 849—852.
12. Аров Д. З. О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем.— ДАН СССР, 1973, **201**, № 3, с. 559—562.
13. Аров Д. З. Реализация матриц-функций по Дарлингтону. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 6, с. 1299—1331.
14. Хейман У. Мероморфные функции.— М. : Мир, 1966.— 287 с.
15. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы.— М. : Физматгиз, 1963.— 287 с.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию 18.V 1978 г.;
после переработки —6.XII 1979 г.