УДК 517.514

А. Н. Комаренко

Асимптотическое разложение собственных функций задачи с параметром в краевых условиях в окрестности угловых граничных точек

Рассматривается задача на собственные значения со спектральным параметром в граничном условии:

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)u=0 \quad \text{в области } G, \tag{1}$$

$$Nu=\lambda u \ \text{ на } S_1, \quad Nu=0 \ \text{ на } S_2=\partial G/S_1, \tag{2}$$

где $Nu \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\vec{\nu}, x_i)$ — производная по конормали.

Предполагается, что область G ограничена, а уравнение (1) эллиптическое с вещественными, бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами в замыкании области $\overline{G} = G \cup \partial G$. Граница области ∂G предполагается замкнутой, гладкой кривой, за исключением точек стыка ее частей S_1 и S_2. Эти точки — угловые. Будем считать, что область G лежит в верхней полуплоскости $x_2 > 0$ и угловая точка находится в начале координат O. Пусть в этой точке касательные к S_1 и S_2 образуют угол θ_0. Предполагаем также, что $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Такие задачи возникают в гидродинамике [1] и других областях.

Как следует из теории эллиптических граничных задач [2], собственные функции задачи (1)—(2) — гладкие функции в области G вплоть до границы ∂G, за исключением угловых точек стыка кривых S_1 и S_2. В угловой точке O собственные функции или их производные могут иметь особенности.

В работе [3] дается асимптотическое разложение в окрестности угловых и конических граничных точек решений неоднородных эллиптических краевых задач.

В настоящей работе получаем асимптотическое разложение для собственных функций задачи (1)—(2) в окрестности угловой точки O. Особенности, определяемые этими разложениями, могут быть использованы для нахождения решений задачи (1)—(2) прямыми методами.

1. Получение асимптотического разложения для собственных функций. Асимптотическое разложение собственных функций задачи (1)—(2) составим из частных решений некоторой более простой вспомогательной задачи, которая образуется из главных частей исходной задачи (1)—(2) [3].

Пусть в некоторой окрестности Q угловой точки O граничные кривые S_1 и S_2 задаются уравнениями $x_1 = \varphi_1(x_2)$, $x_1 = \varphi_2(x_2)$, где $\varphi_1(x_2)$ и $\varphi_2(x_2)$ — бесконечно дифференцируемые функции. Произведем бесконечно дифференцируемое преобразование координат x_1, x_2 так, чтобы область G в окрестности Q преобразовалась в угол G_0 в некоторой окрестности его вершины, находящейся в начале координат. Таким будет преобразование

$$Z: \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1 - \varphi_1(x_2)}{\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)} (\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0))\, x_2 + \varphi_1'(0)\, x_2. \tag{3}$$

Оно переводит кривые S_1 и S_2 в окрестности Q в прямые линии $S_1^{(0)}$ и $S_2^{(0)}$ (уравнения которых $\bar{x}_1 = \varphi_i'(0)\,\bar{x}_2$, $i = 1, 2$).

Собственные функции задачи (1)—(2) после преобразования координат Z будут удовлетворять в некоторой окрестности Q' вершины угла уравнению

$$L^{(1)}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(a_{ij}^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j}\right) + c^{(1)}(\bar{x})\, u = 0 \text{ в } G_0 \cap Q' \tag{4}$$

и граничному условию

$$N^{(1)}u - \sigma(\bar{x})\, u = 0 \text{ на } S^{(0)} \cap Q', \tag{5}$$

где

$$N^{(1)}u \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(1)}(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j} \cos(\vec{\nu}, \bar{x}_i)$$

— производная по конормали,

$$a_{ij}^{(1)}(\bar{x}) = R(\bar{x}) \sum_{m,l=1}^{2} a_{ml}(x) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l},$$

$R(\bar{x})$ — якобиан преобразования Z^{-1}, $c^{(1)}(\bar{x}) = R(\bar{x})\, c(x)$,

$$\sigma(\bar{x}) = \begin{cases} \lambda R_s(\bar{x}) & \text{на } S_1^{(0)}, \\ 0 & \text{на } S_2^{(0)}, \end{cases}$$

$R_s(\bar{x})$ — якобиан преобразования элемента границы.

Нетрудно увидеть, что вспомогательной задачей для (4)—(5) будет задача Неймана в бесконечном углу G_0:

$$\Delta u = f(\bar{x}) \text{ в } G_0; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(\bar{x}) \text{ на } \partial G_0. \tag{6}$$

Особенности собственных функций в их асимптотическом разложении связаны с полюсами некоторой операторной мероморфной функции $R(\lambda)$, которой определяется обратный оператор задачи (6). Построение функции $R(\lambda)$ и формулы для частных решений (6) приводятся в [3].

Асимптотическое разложение собственных функций задачи (1)—(2) можно получить по методу работы [3]. Для этого нужно установить принадлежность этих функций определенному весовому пространству $W_{2,\alpha}^{k}(G_0 \cap Q')$ в окрестности угловой точки. Норма в таком весовом пространстве определяется формулой

$$\| u \|_{W_{2,\alpha}^{k}(G_0 \cap Q')} = \left\{ \int\limits_{G_0 \cap Q'} \sum_{m=0}^{k} \rho^{\alpha - 2(k-m)} \left| \frac{\partial^m u}{\partial \bar{x}^m} \right|^2 dG \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где ρ — расстояние до угловой точки.

Собственные функции задачи (1)—(2) принадлежат соболевскому пространству $W_2^1(G)$ [4]. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Собственные функции задачи (1) — (2) в некоторой окрестности Q угловой граничной точки принадлежат весовому пространству $W_{2,2+\varepsilon}^{2}(G \cap Q)$.*

Доказательство. Собственные функции $u(\bar{x})$ в переменных $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ удовлетворяют эллиптическому уравнению (4) и граничным условиям (5) в области $G_0 \cap Q'$, где Q' — окрестность $\rho < \rho_0$ вершины угла G_0, $\rho_0 = \text{const}$.

Разобьем эту область $G_0 \cap Q'$ на полоски $\Pi_k : \frac{\rho_0}{2^k} < \rho < \frac{\rho_0}{2^{k-1}}$. Получим оценку для собственных функций, связанную со второй полоской Π_2. Для этого выберем некоторую область G_2 с гладкой границей так, чтобы $\Pi_2^{(1)} \subset G_2 \subset \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$, где $\Pi_2^{(1)}$ — полоска немного шире Π_2; $\Pi_2 \subset \Pi_2^{1} : \frac{\rho_0}{4} - \varepsilon < \rho < \frac{\rho_0}{2} + \varepsilon$. Продолжим функцию $\sigma(\bar{x})$ гладким образом с части границы $\partial \Pi_2^{(1)} \cap \partial G_0$ на всю границу ∂G_2. Возьмем финитную функцию $\chi(\bar{x})$:

$$\chi(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x} \in \Pi_2, \\ 0 & \text{при } \bar{x} \bar{\in} \Pi_2^{(1)}, \end{cases}$$

для которой $N^{(1)}\chi = 0$ на ∂G_2. Такую функцию можно построить, так как направление ковариантной производной $N^{(1)}u$ не касается границы в силу эллиптичности $L^{(1)}u$. Тогда, как нетрудно увидеть, функция $\bar{u} = \chi(\bar{x})\, u$, которая совпадает с u в полоске Π_2, будет удовлетворять следующей краевой задаче:

$$L^{(1)}\bar{u} = f(\bar{x}) \text{ в } G_2;\ N^{(1)}\bar{u} - \sigma\bar{u} = 0 \text{ на } \partial G_2, \tag{7}$$

где $f(\bar{x})$ выражается через u и ее первые производные:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_i} + b_0(\bar{x})\, u.$$

Применим к $\bar{u}$ неравенство коэрцитивности, справедливое для решений задачи (7) [2]: $\|\bar{u}\|_2^2 \leqslant c_1 \|f\|_0^2 + c_2 \|\bar{u}\|_0^2$, где постоянные c_1 и c_2 не зависят от $\bar{u}$. Из этого неравенства, учитывая выражение для $f(\bar{x})$ и применяя неравенство Эрлинга — Ниренберга, получаем оценку для $u(\bar{x})$:

$$\iint\limits_{\Pi_2} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j}\right)^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leqslant c_3 \iint\limits_{\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3} u^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2, \tag{8}$$

где постоянная c_3 зависит от коэффициентов уравнения (7) и от σ и не зависит от u.

Преобразуем произвольную k-ю полоску Π_k с помощью преобразования координат $\bar{\rho} = 2^{k-2}\rho$ во вторую полоску Π_2. Преобразовав собственную функцию в k-й полоске во вторую полоску, получим оценку, подобную (8). Из нее в результате обратного преобразования координат получим оценку для произвольной k-й полоски:

$$\iint\limits_{\Pi_k} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j}\right)^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leqslant c_4 \iint\limits_{\Pi_{k-1} \cup \Pi_k \cup \Pi_{k+1}} \frac{1}{\rho^4} u^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2,$$

где постоянная c_4 не зависит от k в силу условий ограниченности и дифференцируемости коэффициентов $a_{ij}^{(1)}(\bar{x})$ и $\sigma(\bar{x})$, а также эллиптичности уравнения (4). Умножая предыдущее неравенство на $\left(\frac{\rho_0}{2^{k-1}}\right)^{2+\varepsilon}$ и суммируя по k, случаем окончательно неравенство

$$\iint\limits_{G_0 \cap Q'} \rho^{2+\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j}\right)^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \leqslant c_5 \iint\limits_{G_0 \cap Q'} \frac{1}{\rho^{2-\varepsilon}} u^2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2.$$

Как нетрудно показать, функции из $W_2^1(G_0 \cap Q')$ принадлежат весовому пространству $W_{2,\varepsilon}^1(G_0 \cap G')$, $\varepsilon > 0$. В силу этого интеграл в правой части полученного выше неравенства сходится, следовательно, сходится интеграл и в левой части этого неравенства. Это означает, что $u \in W_{2,2+\varepsilon}^2(G_0 \cap Q')$. Лемма доказана.

В силу однородности задачи (1) — (2) и гладкости ее коэффициентов собственные функции будут принадлежать весовому пространству $W_{2,2+\varepsilon+2k}^{2+k}(G_0 \cap Q')$ при любом k [3].

Теперь, используя доказанную выше лемму, получаем по методу работы [3] асимптотическое разложение для собственных функций. По виду особенностей получаемых асимптотических разложений различаем три случая:

1) величина $\frac{\pi}{\theta_0}$ — иррациональное число; 2) $\frac{\pi}{\theta_0} = m$ — целое число; 3) $\frac{\pi}{\theta_0}$ — дробно-рациональное число.

В первом случае асимптотическое разложение собственных функций имеет вид

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \frac{\theta_0}{\pi}} \alpha_j \rho^{\frac{j\pi}{\theta_0}} \cos^{\frac{j\pi}{\theta_0}} (\theta - \theta_1) \times$$

$$\times \Bigg(1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k - \frac{j\pi}{\theta_0}} (M_{2i}^{(j)} (\cos\theta, \sin\theta) P_i^{(j)} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) + N_i^{(j)} (\cos\theta, \sin\theta) Q_i^{(j)} (\bar{x}_1, \bar{x}_2))\Bigg) +$$

$$+ u_k (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \tag{9}$$

где $P_i^{(j)}$, $Q_i^{(j)}$ — однородные полиномы i-й степени $M_{2i}^{(j)}$, $N_i^{(j)}$ — полиномы, константы α_j выражаются через u, а функция $u_k (x_1, x_2)$ имеет непрерывные производные до k-го порядка включительно в окрестности угловой точки и $\frac{\partial^i u_k}{\partial \bar{x}^i} (0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k.$

Во втором случае асиптотическое разложение собственных функций имеет вид

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \frac{k}{m}} \alpha_{j-1} \sum_{0 \leqslant s \leqslant \frac{k}{m} - j} \sum_{i=0}^{s} \beta_{i,s}^{(j)} \ln_\rho^i \times$$

$$\times [\ln \rho P_{(j+s)m}^{(i)} (\bar{x}_1, \bar{x}_2)(1 + M) + \theta \bar{P}_{(j+s)m}^{(i)} (1 + N)] +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant k - m} (Q_{2i}^{(1)} (\cos\theta, \sin\theta) P_{m+i}^{(1)} (\bar{x}_1, \bar{x}_2) + Q_i^{(2)} (\cos\theta, \sin\theta) \times$$

$$\times P_{m+i}^{(2)} (\bar{x})) + u_k (\bar{x}), \tag{10}$$

где M и N — выражения вида второй суммы в (7), $P_m^{(l)} (\bar{x})$, $\bar{P}_m^{(l)} (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — однородные полиномы m-й степени, константы $\beta_{i,s}^{(j)}$ выражаются через λ и производные $\frac{\partial^l a_{ij}}{\partial x^l} (0)$, $\frac{\partial^l c}{\partial x^l} (0)$, $\frac{\partial^l \varphi_i}{\partial x^l} (0)$, $|l| \leqslant k + 1$. В этом случае получаем условия $\beta_{i,s}^{(j)} = 0$, при которых особенности в решении отсутствуют.

В третьем случае появляются особенности типа как в первом, так и во втором случаях. Первой особенностью в разложении будет степенная: $\rho^{\pi/\theta_0} \cos \frac{\pi}{\theta_0} (\theta - \theta_1)$, далее появляются и логарифмические особенности на целых полюсах $\lambda_i = ip$ функции $R(\lambda)$.

В результате относительно собственных функций задачи (1)—(2) доказана следующая теорема.

Теорема. *Собственные функции задачи* (1) — (2) *в окрестности угловой точки имеют непрерывные до k-го порядка и принадлежат соболевскому пространству* $W_2^{k+1}(G \cap Q)$, *где в случае нецелого числа* $\frac{\pi}{\theta_0}$ $k = \left[\frac{\pi}{\theta_0}\right]$ $\left(\left[\frac{\pi}{\theta_0}\right]\right.$ — *целая часть от* $\left.\frac{\pi}{\theta_0}\right)$, *а в случае* $\frac{\pi}{\theta_0}$ — *целое число* $k = \frac{\pi}{\theta_0} - 1$. *В угловой точке O собственные функции имеют особенности, которые определяются в их асимптотических разложениях* (9) — (10).

2. Частные случаи. Приведем некоторые примеры асимптотического разложения собственных функций.

Рассмотрим гидродинамическую задачу о свободных колебаниях жидкости, частично заполняющей осесимметричную полость [1]. Она сводится к задаче на собственные значения:

$$\Delta u = 0 \text{ в области } Q, \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \text{ на свободной поверхности } \Sigma, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на твердой смачиваемой стенке } S.$$

В силу осевой симметрии полости отделением угловой переменной эту задачу сводим к двумерной задаче [5] в области G с угловой граничной точкой A:

$$Lu \equiv y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \text{ в области } G,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \text{ на } \Sigma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_1. \tag{12}$$

Для получения асимптотического разложения собственных функций задачи (10) в окрестности угловой точки A преобразованием координат $y = y(\eta, \xi)$, $z = z(\eta, \xi)$ эту задачу сводим к виду задачи (4) — (5). При этом область G в окрестности угловой точки A преобразуется в угол $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta_0$ в плоскости переменных η, ξ, (ρ, θ — полярные координаты).

Далее, на основании доказанной выше леммы получаются асимптотические разложения для собственных функций задачи (12).

Для углов θ_0, для которых величина $\frac{\pi}{\theta_0}$ — нецелое число, это асимптотическое разложение имеет вид (9) и первой особенностью в нем будет степенная вида $\alpha_i \rho^{\frac{j\pi}{\theta_0}} \cos \frac{\pi}{\theta_0}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

В случае, когда граничная линия S_1 прямая и $\theta_0 = 60°$, получаем асимптотическое разложение вида (10) для собственных функций

$$u(\eta, \xi) = c + \lambda c(-\operatorname{ctg}\theta_0 \xi + \eta) + \frac{c}{4}(1 - \lambda \operatorname{ctg}\theta_0)\rho^2 - \lambda^2 c \operatorname{ctg}\theta_0 \eta\xi -$$
$$- \frac{1}{2}\lambda^2 c \operatorname{ctg}\theta_0 \operatorname{ctg} 2\theta_0 (\eta^2 - \xi^2) + [P_3(\eta, \xi)\ln\rho + Q_3(\eta, \xi)\theta] + \ldots,$$

где $P_3(\eta, \xi)$ и $Q_3(\eta, \xi)$ — однородные полиномы третьей степени, которые можно выписать в явном виде и коэффициенты которых выражаются через константы c, λ и θ_0.

Для угла $\theta_0 = 45°$ получаем

$$u(\eta, \xi) = c + \lambda c(-\xi + \eta) + \frac{c}{4}(1 - \lambda)\rho^2 - \lambda^2 c\eta\xi + c(1 - \lambda) \times$$
$$\times \left[\frac{5}{48}(3\eta^2\xi - \xi^3) + \frac{\lambda}{24}(\eta^3 - 3\xi^2\eta) + \left(\frac{5}{16}\xi + \frac{\lambda}{8}\eta\right)\rho^2\right] +$$
$$+ \frac{7}{24\pi} c(1 - \lambda)(\eta^4 - 6\eta^2\xi^2 + \xi^4)\ln\rho +$$
$$+ \frac{28}{24\pi} c(1 - \lambda)(\eta^3\xi - \eta\xi^3) \times \theta + (1 - \lambda) u_5(\eta, \xi).$$

Из этого разложения следует, что при $\lambda = 1$ существует гладкая собственная функция $u(\eta, \xi) = c(1 - \xi + \eta - \eta\xi)$, все остальные собственные функции, для которых $u(0) \equiv c \neq 0$, имеют в разложении первую особенность вида $P_4(\eta, \xi) \ln \rho$.

В случае, когда часть границы S_1 в некоторой окрестности угловой точки прямая и $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, коэффициенты при особенных членах в асимптотическом разложении, как можно показать, обращаются в нуль и, следовательно, собственные функции бесконечно дифференцируемы. Заметим, что гладкость собственных функций зависит от кривизны граничных кривых в угловой точке. Так, при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ для собственных функций задачи (12) получается разложение

$$u(\eta, \xi) = c + \lambda\eta\xi + \frac{\lambda c \varphi''(A)}{\pi}\left[(\xi^2 - \eta^2)\ln\rho + 2\eta\xi \operatorname{arctg}\frac{-\eta}{\xi}\right] + u_3(\eta, \xi),$$

где $y = \varphi(z)$ — уравнение кривой S_1 в окрестности угловой точки A, функция $u_3(\eta, \xi)$ имеет непрерывные производные второго порядка. Из этого разложения следует, что если кривизна S_1 в угловой точке отлична от нуля, то вторые производные от u в угловой точке имеют логарифмическую особенность, которой не будет при $\varphi''(A) = 0$.

Отметим, что особенные члены асимптотического разложения можно использовать для нахождения решений прямыми методами. Так, при включении их в систему координатных функций достигается лучшая сходимость приближений к решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижнных полостях.— Киев : Наук. думка, 1966.— 250 с.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.
3. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
4. Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях.— Укр. мат. журн., 1965, **17**, № 6, с. 22—30.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 28.X 1976 г.;
после переработки — 6.IV 1979 г.