УДК 517.946

С. А. Кривошея

О схеме метода усреднения для исследования резонансных режимов в распределенных системах, возбуждаемых многочастотными мгновенными импульсными силами

Как показано в работах [1, 2, 3], асимптотические методы нелинейной механики применимы для исследования некоторых классов колебательных систем, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. К таким системам относятся, в частности, системы, возбуждаемые мгновенными импульсными силами.

В приложениях часто встречаются нелинейные колебательные системы, исследование которых приводит к рассмотрению многочастотных резонансных режимов колебаний [4, 5]. В современных инженерных конструкциях такие важные элементы, как балки, стержневые системы, пластины, валы, трубопроводы, находятся под воздействием возмущающих сил сложной природы, часть из которых плавно изменяется во времени, а часть— имеет мгновенный импульсный характер. Расчет колебаний таких систем требует учета влияния специфики всех многочастотных возмущающих сил, учета всех возможных в данной системе резонансов, как внутренних, так и вызванных сложными возмущениями.

В настоящей работе разработана схема метода усреднения применительно к исследованию многочастотных нестационарных резонансных режимов колебаний в распределенных системах, находящихся под воздействием мгновенных импульсных и квазигармонических сил. Рассмотрен случай нелинейных краевых условий неавтономного типа.

Рассмотрим краевую задачу вида

$$L^{(2n)}u + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon f\left(x, \tau, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial t^{k_2}}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N\right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{l=1}^{L} g_l\left(x, \tau, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial t^{k_2}}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\theta_l - 2m\pi) \equiv$$

$$\equiv \varepsilon F\left(x, \tau, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial t^{k_2}}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N, \theta_1, \ldots, \theta_L\right), \qquad (1)$$

$$L_{s,i}^{(j)}(u_{(s)}) = \varepsilon \eta_{s,i}\left(\tau, u_{(s)}, \frac{\partial^r u_{(s)}}{\partial x^r}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N\right) \qquad (j \leqslant 2n-1;\ s = 1, 2;$$

$$i = 1, \ldots, n). \qquad (2)$$

Здесь $L^{(2n)}u$ — линейный однородный дифференциальный оператор порядка $2n$ с частными производными по x; $\alpha = \text{const}$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, t — время; $2n \geqslant k = k_1 + k_2$; $d\vartheta_i/dt = \omega_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n)$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $\theta_l = \nu_l(\tau)(t - t_l)$, $\nu_l(\tau) = 2\pi/(T_l + \xi_l(\tau))$, $t_l, T_l = \text{const}$, $l = 1, \ldots, L$; $0 < x < a$; $L_{s,i}^{(j)}$ — линейные однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и частными производными по x; $u_{(1)} = u|_{x=0}$, $u_{(2)} = u|_{x=a}$, $\frac{\partial^r u_{(1)}}{\partial x^r} = \left.\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right|_{x=0}$, $\frac{\partial^r u_{(2)}}{\partial x^r} = \left.\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right|_{x=a}$; $r \leqslant j$; медленно меняющиеся функции времени $\omega_i(\tau)$, $\nu_l(\tau)$ положительны и достаточное число раз дифференцируемы в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant T$; функции f, g_l, $\eta_{s,i}$ также достаточное число раз дифференцируемы в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant T$ и, кроме того, обладают представлениями в виде конечных сумм Фурье по $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N$ с коэффициентами, являющимися целыми рациональными функциями относительно $\frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial t^{k_2}}$ (для f и g_l) и относительно $u_{(s)}$, $\frac{\partial^r u_{(s)}}{\partial x^r}$ (для $\eta_{s,i}$).

Задача (1), (2) является математической моделью распределенной системы, находящейся под воздействием N квазигармонических (с частотами $\omega_i(\tau)$) и L мгновенных импульсных (с частотами $\nu_l(\tau)$) нелинейных сил. Периодически повторяющиеся мгновенные импульсы сосредоточены в моменты $t = t_l + m(T_l + \xi_l(\tau))$, где T_l — периоды действия импульсов при $\tau = 0$, $\xi_l(\tau)$— малые смещения относительно периодов T_l, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Предположим, что для «невозмущенной» задачи ((1), (2) при $\varepsilon=0$) с помощью метода разделения переменных найдены: 1) полная в $L^2_{(0,a)}$ система $\{X_k(x)\}_1^\infty$ фундаментальных функций, удовлетворяющих условиям

$$L^{(2n)}X_k-\alpha\lambda_k^2X_k=0,\quad L_{s,i}^{(j)}(X_{k(s)})=0, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^a \rho(x)X_i(x)X_j(x)\,dx=0 \qquad (i\neq j), \tag{4}$$

где $\rho(x)$ — весовая функция; 2) последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ частот собственных колебаний.

Предположим, что в рассматриваемой колебательной системе на промежутке $0\leqslant\tau\leqslant T$ могут выполняться P групп сложных резонансных соотношений вида

$$\sum_{\mu=1}^{N}p_\mu^{(k,i)}\omega_\mu(\tau)+\sum_{l=1}^{L}q_l^{(k,i)}\nu_l(\tau)+\sum_{\nu=1}^{R}r_\nu^{(k,i)}\lambda_\nu\approx\lambda_k,\ (k=1,\dots,R;\ i=1,\dots,P), \tag{5}$$

где $p_\mu^{(k,i)}$, $q_l^{(k,i)}$, $r_\nu^{(k,i)}$ — целые числа.

Наличие в реальных системах диссипативных сил приводит к затуханию «нерезонансных» форм колебаний. Поэтому при переходе к рассмотрению «возмущенной» краевой задачи (1), (2) естественно исследовать R-частотный режим колебаний, который осуществляется в условиях резонансов (5).

В (1), (2) производим «замену» неизвестной функции согласно формулам

$$u=\sum_{s=1}^{R}a_sX_s(x)\cos\psi_s+\varepsilon\chi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{s=1}^{R}a_s\lambda_sX_s(x)\sin\psi_s+\varepsilon\frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{7}$$

где величины a_s, $\bar\psi_s=\psi_s-\lambda_st$, характеризующие амплитуды и фазы R-частотных колебаний, — «новые» медленно меняющиеся неизвестные функции, а функция $\chi\equiv\chi(x,\tau,a_s,\psi_s,\vartheta_\mu)$ определяет возмущение форм колебаний за счет нелинейных краевых условий неавтономного типа.

Подставив (6) с учетом (3) в краевые условия (2), для определения функции χ с точностью до членов порядка ε, получим соотношения

$$L_{s,i}^{(j)}(\chi_{(s)})=\eta_{s,i}\left(\tau,u_{(s)},\frac{\partial^r u}{\partial x_{(s)}^r},\vartheta_1,\dots,\vartheta_N\right)\Bigg|_{u=\sum\limits_{k=1}^{R}a_kX_k\cos\psi_k}\equiv\eta_{s,i}^{(0)}(\tau,a_k,\psi_k,\vartheta_\mu),$$
$$(j\leqslant 2n-1;\ s=1,2;\ i=1,\dots,n). \tag{8}$$

Получим уравнение для a_s, $\bar\psi_s$ $(s=1,\dots,R)$. Дифференцируя (6) по t и сравнивая полученный результат с (7), заключаем, что

$$\sum_{s=1}^{R}\left(\frac{da_s}{dt}\cos\psi_s-a_s\frac{d\bar\psi_s}{dt}\sin\psi_s\right)X_s(x)=0. \tag{9}$$

Подставляя (6), (7) с учетом (9) в уравнение (1), с точностью до членов порядка ε находим

$$\sum_{s=1}^{R}\left(\lambda_s \frac{da_s}{dt}\sin\psi_s + a_s\lambda_s \frac{d\bar{\psi}_s}{dt}\cos\psi_s\right)X_s(x) = -\frac{\varepsilon}{\alpha}\bar{F}^{(0)}(x, \tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu, \theta_l), \tag{10}$$

где

$$\bar{F} \equiv F - L^{(2n)}\chi - \alpha\left(\sum_{k=1}^{R}\lambda_k \frac{\partial}{\partial\psi_k} + \sum_{\mu=1}^{N}\omega_\mu \frac{\partial}{\partial\vartheta_\mu}\right)^{(2)}\chi \equiv$$

$$\equiv \bar{f} + \sum_{l=1}^{L} g_l \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(\theta_i - 2m\pi), \tag{11}$$

а

$$\bar{F}^{(0)} \equiv \bar{F}^{(0)}(x, \tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu, \theta_l) \equiv$$

$$\equiv \bar{F}\left(x, \tau, \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_2}}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_N, \theta_1, \dots, \theta_L\right)\Bigg|_{u=\sum\limits_{s=1}^{R} a_s X_s \cos\psi_s}. \tag{12}$$

Уравнения (9), (10) умножаем последовательно на $\rho(x)X_s(x)$ $(s = 1, \dots, R)$ и интегрируем по отрезку $[0, a]$. Определив из полученной системы da_s/dt и $d\bar{\psi}_s/dt$, приходим к системе стандартного вида:

$$\frac{da_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\alpha\lambda_s}\bar{F}_s^{(0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu, \theta_l)\sin\psi_s,$$

$$\frac{d\bar{\psi}_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\alpha\lambda_s a_s}\bar{F}_s^{(0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu, \theta_l)\cos\psi_s, \tag{13}$$

где $\bar{F}_s^{(0)}$ — коэффициенты разложения функции $\bar{F}^{(0)}$ в ряд по системе $\{X_k(x)\}_1^\infty$.

Правые части системы (13) представим в виде кратных рядов Фурье в комплексной форме

$$\frac{da_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2i\alpha\lambda_s}\left\{\sum_{m_k, n_\mu, k_l}\bar{F}^{(s)}_{m_k, n_\mu, k_l}(\tau, a_k)\, e^{i\left\{\sum\limits_1^R m_k\psi_k + \sum\limits_1^N n_\mu\vartheta_\mu + \sum\limits_1^L k_l\theta_l + \psi_s\right\}} -\right.$$

$$\left. - \sum_{m_k, n_\mu, k_l}\bar{F}^{(s)}_{m_k, n_\mu, k_l}(\tau, a_k)\, e^{i\left\{\sum\limits_1^R m_k\psi_k + \sum\limits_1^N n_\mu\vartheta_\mu + \sum\limits_1^L k_l\theta_l - \psi_s\right\}}\right\}, \tag{14}$$

$$\frac{d\bar{\psi}_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\alpha\lambda_s a_s}\left\{\sum_{m_k, n_\mu, k_l}\bar{F}^{(s)}_{m_k, n_\mu, k_l}(\tau, a_k)\, e^{i\left\{\sum\limits_1^R m_k\psi_k + \sum\limits_1^N n_\mu\vartheta_\mu + \sum\limits_1^L k_l\theta_l + \psi_s\right\}} +\right.$$

$$\left. + \sum_{m_k, n_\mu, k_l}\bar{F}^{(s)}_{m_k, n_\mu, k_l}(\tau, a_k)\, e^{i\left\{\sum\limits_1^R m_k\psi_k + \sum\limits_1^N n_\mu\vartheta_\mu + \sum\limits_1^L k_l\theta_l - \psi_s\right\}}\right\}.$$

Из системы уравнения стандартного вида (14) в качестве системы уравнений первого приближения получаем

$$\frac{da_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2i\alpha\lambda_s(2\pi)^{R+N+L}}\left\{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{i\psi_s}\,d\psi_1\ldots d\theta_L -\right.$$

$$-\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{-i\psi_s}\,d\psi_1\ldots d\theta_L + \sum_{j=1}^{P}\left[e^{i\varphi_{s,j}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{i(\psi_s-\varphi_{s,j})}d\psi_1\ldots d\theta_L -\right.$$

$$\left.\left.- e^{-i\varphi_{s,j}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{-i(\psi_s-\varphi_{s,j})}d\psi_1\ldots d\theta_L\right]\right\}, \qquad (15)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\alpha\lambda_s a_s(2\pi)^{R+N+L}}\left\{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{i\psi_s}\,d\psi_1\ldots d\theta_L +\right.$$

$$+\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{-i\psi_s}\,d\psi_1\ldots d\theta_L + \sum_{j=1}^{P}\left[e^{i\varphi_{s,j}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{i(\psi_s-\varphi_{s,j})}d\psi_1\ldots d\theta_L +\right.$$

$$\left.\left.+ e^{-i\varphi_{s,j}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\bar{F}_s^{(0)}e^{-i(\psi_s-\varphi_{s,j})}d\psi_1\ldots d\theta_L\right]\right\},$$

где

$$\psi_s - \varphi_{s,j} = \sum_{\gamma=1}^{R} r_\gamma^{(s,j)}\psi_\gamma + \sum_{\mu=1}^{N} p_\mu^{(s,j)}\vartheta_\mu + \sum_{l=1}^{L} q_l^{(s,j)}\theta_l \qquad (s = 1, \ldots, R;$$

$$j = 1, \ldots, P), \qquad (16)$$

а символом $\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}(\ldots)\,d\psi_1\ldots d\theta_L$ обозначен $R+N+L$-кратный интеграл по $\psi_1, \ldots, \psi_R$, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N$, $\theta_1, \ldots, \theta_L$.

Переход от системы стандартного вида (14) к системе уравнений первого приближения (15) осуществлен с помощью усреднения правых частей (14) по явно входящему времени. Величины a_k, $\bar{\psi}_k$, $\varphi_{s,j}$ (s, $k = 1, \ldots, R$; $j = 1, \ldots, P$), а также τ при этом считаются постоянными.

Используя системы (14), (15), можно построить также первые улучшенные приближения для a_s, $\bar{\psi}_s$ ($s = 1, \ldots, R$):

$$a_{s\,\text{ул}} = a_s - \frac{\varepsilon}{\alpha\lambda_s}\left\{\sum_{m_k, n_\mu}\frac{\Phi^{(1)}\sin\Omega - \bar{\Phi}^{(1)}\cos\Omega}{\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu(\tau)} +\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{L}\left[G_{s,0}^{(l,1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\theta_l}{m\nu_l(\tau)} + \frac{1}{2}\sum_{m_k, n_\mu}\frac{G^{(l,1)}\sin\Omega - \bar{G}^{(l,1)}\cos\Omega}{\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu(\tau)} +\right.$$

$$+\sum_{m_k, n_\mu, m}\left(G^{(l,1)}\frac{(\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu)\sin\Omega\cos m\theta_l - m\nu_l\cos\Omega\sin m\theta_l}{(\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu(\tau))^2 - m^2\nu_l^2} -\right.$$

$$\left.\left.\left.-G^{(l,1)}\frac{(\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu)\cos\Omega\cos m\theta_l + m\nu_l\sin\Omega\sin m\theta_l}{\left(\sum_1^R m_k\lambda_k + \sum_1^N n_\mu\omega_\mu(\tau)\right)^2 - m^2\nu_l^2}\right)\right]\right\}, \qquad (17)$$

$$\bar{\psi}_{s\,\text{ул}} = \bar{\psi}_s - \frac{\varepsilon}{\alpha\lambda_s a_s}\left\{\sum_{m_k, n_\mu} \frac{\Phi^{(2)}\sin\Omega - \bar{\Phi}^{(2)}\cos\Omega}{\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu(\tau)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{L}\left[G_{s,0}^{(l,2)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\theta_l}{m\nu_l(\tau)} + \frac{1}{2}\sum_{m_k, n_\mu}\frac{G^{(l,2)}\sin\Omega - \bar{G}^{(l,2)}\cos\Omega}{\sum\limits_1^R m_k\lambda_k + \sum\limits_1^N n_\mu\omega_\mu(\tau)} + \right.$$

$$+ \sum_{m_k, n_\mu, m}\left(G^{(l,2)}\frac{(\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu)\sin\Omega\cos m\theta_l - m\nu_l\cos\Omega\sin m\theta_l}{\left(\sum\limits_1^R m_k\lambda_k + \sum\limits_1^N n_\mu\omega_\mu(\tau)\right)^2 - m^2\nu_l^2} - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \bar{G}^{(l,2)}\frac{(\Sigma m_k\lambda_k + \Sigma n_\mu\omega_\mu)\cos\Omega\cos m\theta_l + m\nu_l\sin\Omega\sin m\theta_l}{\left(\sum\limits_1^R m_k\lambda_k + \sum\limits_1^N n_\mu\omega_\mu(\tau)\right)^2 - m^2\nu_l^2}\right)\right]\right\}.$$

В (17) $\Omega = \Sigma m_k\psi_k + \Sigma n_\mu\vartheta_\mu$, $\Phi^{(j)} = \Phi^{(j)}_{s,m_k,n_\mu}(\tau, a_k)$, $\bar{\Phi}^{(j)} = \bar{\Phi}^{(j)}_{s,m_k,n_\mu}(\tau, a_k)$, $G^{(l,j)} = G^{(l,j)}_{s,m_k,n_\mu}(\tau, a_k)$, $\bar{G}^{(l,j)} = \bar{G}^{(l,j)}_{s,m_k,n_\mu}(\tau, a_k)$ $(j = 1, 2)$; $\Phi^{(1)}_{s,0}$, $\Phi^{(1)}_{s,m_k,n_\mu}$, $\bar{\Phi}^{(1)}_{s,m_k,n_\mu}$; $\Phi^{(2)}_{s,0}$, $\Phi^{(2)}_{s,m_k,n_\mu}$, $\bar{\Phi}^{(2)}_{s,m_k,n_\mu}$; $G^{(l,1)}_{s,0}$, $G^{(l,1)}_{s,m_k,n_\mu}$, $\bar{G}^{(l,1)}_{s,m_k,n_\mu}$; $G^{(l,2)}_{s,0}$, $G^{(l,2)}_{s,m_k,n_\mu}$, $\bar{G}^{(l,2)}_{s,m_k,n_\mu}$ — соответственно коэффициенты Фурье функций $\bar{f}_s^{(0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)\sin\psi_s$; $\bar{f}_s^{(0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)\cos\psi_s$; $g_s^{(l,0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)\sin\psi_s$; $g_s^{(l,0)}(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)\cos\psi_s$ $(s = 1,\ldots, R)$, а a_s, $\bar{\psi}_s$ — решения усредненной системы (15).

Знаменатели $\Delta(\lambda_k, \omega_\mu, \nu_l) = \left(\sum\limits_1^R m_k\lambda_k + \sum\limits_1^N n_\mu\omega_\mu\right)^2 - m^2\nu_l^2 \neq 0$, так как члены, для которых в силу резонансных условий (5) $\Delta(\lambda_k, \omega_\mu, \nu_l) = 0$, учтены в уравнениях усредненной системы (15).

Анализируя (17), можно сделать следующий вывод. В формулы (17) входит сумма $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\theta_l}{m\nu_l(\tau)}$, являющаяся рядом Фурье для функции $\frac{1}{2}(\pi - \theta_l)$ в интервале $0 < \theta_l < 2\pi$. Поэтому величины $a_{s\,\text{ул}}$, $\bar{\psi}_{s\,\text{ул}}$ в моменты времени $t = t_l + m(T_l + \xi_l(\tau))$ $(l = 1, \ldots, L;\ m = 0, \pm 1, \ldots)$ терпят конечные разрывы, т. е. действие мгновенных импульсов проявляется в частности, в скачкообразности изменения величин $a_{s\,\text{ул}}$, $\bar{\psi}_{s\,\text{ул}}$, характеризующих амплитуды и фазы рассматриваемого R-частотного режима колебаний.

Как следует из (11), правые части (15), (17) зависят от неизвестной функции $\chi(x, \tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)$, которая выбирается из условий (8). Остановимся на одном приеме построения функции χ.

С целью упрощения правых частей системы (13), функцию ищем в виде

$$\chi(x, \tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu) = \sum_{r=0}^{2n-1} c_r(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)\, x^r. \tag{18}$$

Выражение (18) подставим в $2n$ условий (8). Тогда относительно $c_r(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)$ $(r = 0, 1, \ldots, 2n - 1)$ получим систему $2n$ линейных неоднородных алгебраических уравнений, т. е. определение коэффициентов $c_r(\tau, a_k, \psi_k, \vartheta_\mu)$ сводится к алгебраическим операциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М. Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах второго порядка с малым параметром.— Укр. мат. журн., 1961, 13, № 3, с. 103—109.
2. Самойленко А. М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.— В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1968, с. 90—95.
3. Перестюк Н. А. Некоторые вопросы исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений с мгновенным изменением: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1971.— 12 с.
4. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968.— 414 с.
5. Рубаник В. П. Применение асимптотических методов к исследованию многочастотных колебаний в нелинейных системах.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1977, с. 173—181.

Киевское высшее военное
авиационное инженерное училище

Поступила в редакцию
16.V 1980 г.