УДК 517.91:943

*В. Ф. Лисяной*

# О нормальной форме неавтономных систем

Статья посвящена вопросу о приведении к нормальной форме формальной неавтономной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть $P$ — поле вещественных или комплексных чисел. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x, t), \quad (t \in R^1), \tag{1}$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ — матрица-функция размера $n \times n$, элементы которой — периодические с периодом 1 функции класса $C^k$ со значениями в поле $P$,

$$f(x, t) = \left\{ \sum_{|l| \geqslant 2} f_l^j(t) x^l \right\}_{j=1}^n$$

— формальное отображение в $P^n$ с периодическими коэффициентами $f_l^j(t) \in C^k$.

В множестве систем вида (1) действует группа формальных преобразований

$$\Phi(x, t) = x + \varphi(x, t), \tag{2}$$

где $\varphi(x, t) = \left\{ \sum_{|l| \geqslant 2} \varphi_l^j(t) x^l \right\}_{j=1}^n$ — вектор с периодическими коэффициентами $\varphi_l^j(t) \in C^k$.

Система (1) называется эквивалентной системе

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(y, t), \tag{3}$$

если существует формальное преобразование (2), переводящее (3) в (1).

Обозначим через $A^*(t)$ матрицу, эрмитово сопряженную к $A(t)$.

Т е о р е м а. *Всякая формальная система* (1) *эквивалентна системе* (3), *в которой* $g(y, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial g(y, t)}{\partial t} + A^*(t) g(y, t) - \frac{\partial g(y, t)}{\partial y} A^*(t) y = 0. \tag{4}$$

Будем говорить, что система (3) имеет нормальную форму, если она удовлетворяет условию (4).

Эту нормальную форму можно рассматривать как перенесение на неавтономный случай нормальной формы, введенной в [1].

Как и в автономном случае, предлагаемая нами нормальная форма не единственная. Например, всякая система, матрица линейного приближения которой тождественно по $t$ равна нулю, имеет нормальную форму.

Пример 1. Рассмотрим систему (1) с диагональной матрицей $A(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$. Если система (3) с такой $A(t)$ имеет нормальную форму, то $g(y, t) = \left\{ \sum\limits_{|I|\geqslant 2} g_I^j \alpha_I^j(t)\, x^I \right\}_{j=1}^{n}$, где $\alpha_I^j(t) = \exp\left( \int\limits_0^t (\bar{\lambda}_j(s) - (I, \bar{\lambda}(s)))\, ds \right)$,

а суммирование распространяется на все такие пары $(j, I)$, для которых

$$\int\limits_0^1 (\lambda_j(s) - (I, \lambda(s)))\, ds = 2r\pi i \tag{5}$$

при некотором целом $r$. Здесь $(I, \lambda(s)) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} I_\nu \lambda_\nu(s)$ для каждого мультииндекса $I = (I_1, \ldots, I_n)$.

Следствие 1. *Если матрица $A(t)$ системы* (1) *диагональна и для всех пар $(j, I)$ выполняется условие* (5), *то система* (1) *эквивалентна линейной*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y.$$

Если матрица $A(t) = \Lambda$ — постоянна и ее собственные числа удовлетворяют условию

$$\lambda_j - \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu \lambda_\nu \neq 2r\pi i \quad (|I| \geqslant 2) \tag{6}$$

при всех целых $r \neq 0$, то любое периодическое решение уравнения (4) постоянно (не зависит от $t$). Поэтому справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Если линейное приближение формальной системы* (1) *постоянно, а для собственных чисел выполнено условие* (6), *то эта система эквивалентна автономной.*

Близкий результат для вещественных гладких систем получен в работе [2].

Если же условие (6) не выполняется, то система с таким линейным приближением, вообще говоря, не эквивалентна автономной.

Пример 2. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi i x + e^{-2\pi i t} x^2 \tag{7}$$

и покажем, что не существует формального преобразования

$$y = x + \varphi(x, t) = x + \varphi_1(t)\, x^2 + \ldots \tag{8}$$

с периодическими коэффициентами, переводящего (7) в автономное уравнение $\frac{dy}{dt} = 2\pi i y + c_1 y^2 + \ldots$.

Предположим, что такое преобразование (8) существует. Тогда для коэффициента $\varphi_1(t)$ при $x^2$ получаем $\varphi_1'(t) + 2\pi i \varphi_1(t) = c_1 - e^{-2\pi i t}$, откуда

$$\varphi_1(t) = e^{-2\pi i t}\left( \varphi_1(0) + \frac{c_1}{2\pi i} e^{2\pi i t} - \frac{c_1}{2\pi i} - t \right).$$

Таким образом, $\varphi_1(t)$ не является периодической функцией ни при каком $c_1$.

Доказательство теоремы. Если преобразование (2) переводит систему (3) в систему (1), то его однородные слагаемые $\varphi^{(i)}(x, t)$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$\frac{\partial\varphi^{(i)}(x,t)}{\partial t} - A(t)\,\varphi^{(i)}(x,t) + \frac{\partial\varphi^{(i)}(x,t)}{\partial x}A(t)\,x =$$

$$= T\left(\varphi^{(2)}(x,t), \ldots, \varphi^{(i-1)}(x,t)\right) + g^{(i)}(x,t), \tag{9}$$

где

$$T\left(\varphi^{(2)}(x,t), \ldots, \varphi^{(i-1)}(x,t)\right) = -f^{(i)}(x,t) -$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}f(x,t)\right)^{(i)} + \left(g\left(x+\varphi(x,t),t\right)\right)^{(i)} - g^{(i)}(x,t).$$

Запишем дифференциальный оператор, стоящий в левой части (9), в виде $Lu = \dfrac{du}{dt} + B(t)\,u$. Этот оператор действует в пространстве периодических вектор-функций класса $C^k$. Согласно [3, с. 483] любую такую вектор-функцию $u$ можно представить в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \operatorname{Im} L$, $u_2 \in \operatorname{Ker} L^*$. В соответствии с этим можно написать $T\left(\varphi^{(2)}(x,t), \ldots, \varphi^{(i-1)}(x,t)\right) = b_1^{(i)}(x,t) + b_2^{(i)}(x,t)$.

Положим по индукции $g^{(i)}(x,t) = -b_2^{(i)}(x,t)$, и пусть $\varphi^{(i)}$ — решение уравнения $L\varphi^{(i)} = b_1^{(i)}$.

Построенные таким образом формальные ряды

$$\Phi(x,t) = x + \sum_i \varphi^{(i)}(x,t), \quad g(x,t) = \sum_i g^{(i)}(x,t)$$

удовлетворяют требованиям теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белицкий Г. Р. Нормальные формы формальных рядов и ростков $C^\infty$-отображений относительно действия группы.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, **40**, № 4, с. 855—868.
2. Самовол В. С. О линеаризации системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.— ДАН СССР, 1972, **206**, № 3, с. 545—548.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию 19.V 1978 г.;
после переработки — 22.X 1979 г.