УДК 517.946

*З. О. Мельник*

# Пример неклассической граничной задачи для уравнения колебаний струны

Для дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа хорошо изучены три основные классические граничные задачи: задача Коши, смешанная задача и задача Гурса. В данной заметке изучается одна новая задача для гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных. Для краткости изложения рассматривается уравнение колебаний струны, хотя легко заметить, что применяемый метод без принципиальных изменений позволяет исследовать аналогичную задачу для общего уравнения второго порядка.

Пусть задано положительное число $k < 1$ и область $D = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < t < \infty, \ -kt < x < kt\}$. В $D$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \tag{1}$$

где $f$ — заданная функция. Ищется классическое решение этого уравнения в $D$, удовлетворяющее на боковых сторонах $x = -kt$ и $x = kt$ граничным условиям

$$\begin{aligned} &\left[a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_3 u\right]_{x=-kt} = h_1(t), \\ &\left[b_1 \frac{\partial u}{\partial t} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_3 u\right]_{x=kt} = h_2(t) \end{aligned} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{2}$$

и дополнительному условию в начале координат

$$u(0, 0) = u_0. \tag{3}$$

Здесь $a_i$, $b_i$, $u_0$ — заданные числа, $h_1$ и $h_2$ — заданные функции на положительной полуоси.

Заметим, что при $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, $a_3 = b_3 = 1$, $k = 1$ задача (1)—(3) превращается в задачу Гурса для уравнения (1). При $k > 1$ задача явно некорректна.

Естественно предполагать, что с учетом (3) условия (2) однозначно определяют значения первых производных искомой функции в точке (0, 0), т. е. что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Предположим, что* 1) *функция $f$ непрерывна по совокупности переменных и один раз непрерывно дифференцируема по $x$ в области $\overline{D}$;* 2) *функции $h_1$ и $h_2$ один раз непрерывно дифференцируемы на* $[0, \infty[$; 3) *выполнено условие* (4) *и*

$$a_1 - a_2 \neq 0, \qquad b_1 + b_2 \neq 0, \qquad \left| \frac{(a_2 + a_1)(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)} \right| < 1. \tag{5}$$

*Тогда задача* (1)—(3) *имеет в $D$ единственное классическое решение.*

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде эквивалентной системы первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = f \tag{6}$$

и введем две вспомогательные функции $\nu$ и $\mu$, положив

$$u(-kt, t) = \nu(t), \quad v(kt, t) = \mu(t). \tag{7}$$

Тогда, учитывая (7), интегрируя систему (6) вдоль характеристик [1] и исключая затем функцию $v$ из полученных соотношений, однозначно получим для любой точки $(x, t) \in \overline{D}$:

$$u(x, t) = \nu\left(\frac{t - x}{1 + k}\right) + \frac{1 + k}{2} \int\limits_{\frac{(1-k)}{(1+k)^2}(t-x)}^{\frac{t+x}{1+k}} \mu(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1-k}{1+k}(t-x)}^{t+x} d\xi \int\limits_{\xi}^{\frac{\xi+t-x}{2}} f(\xi - \tau, \tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, остается доказать, что дополнительные функции $\nu$ и $\mu$ можно однозначно подобрать так, чтобы они были соответственно два раза и один раз непрерывно дифференцируемыми на $[0, \infty[$ и чтобы функции (8) удовлетворяли условиям (2) и (3).

Условие (3) дает $\nu(0) = u_0$. Требуя удовлетворения условий (2), приходим к системе двух дифференциально-функциональных уравнений для определения функций $\nu$ и $\mu$:

$$(a_1 - a_2)\,\nu'(t) + (1 + k)\,a_3\nu(t) + (a_2 + ka_1)\,\mu(\lambda t) = (1 + k)\,h_1(t) - $$
$$- (a_2 + ka_1) \int\limits_{(1-k)t}^{t} f((1 - k)\,t - \tau, \tau)\, d\tau,$$

$$\mu(t) + \lambda\,\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}\,\mu(\lambda^2 t) - \frac{2}{1 + k}\,\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}\,\nu'(\lambda t) + \frac{2b_3}{b_2 + b_1}\,\nu(\lambda t) + \tag{9}$$
$$+ \frac{(1 + k)\,b_3}{b_2 + b_1} \int\limits_{\lambda^2 t}^{t} \mu(\tau)\, d\tau = h_2(t) + \int\limits_{t}^{(1+k)t} f((1 + k)\,t - \tau, \tau)\, d\tau -$$
$$- \lambda\,\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1} \int\limits_{\lambda(1-k)t}^{\lambda t} f(\lambda(1 - k)\,t - \tau, \tau)\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{2}\,\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1} \int\limits_{\lambda(1-k)t}^{(1+k)t} f\left(\frac{\xi - (1 - k)\,t}{2}, \ \frac{\xi + (1 - k)\,t}{2}\right) d\xi,$$

где $\lambda = \dfrac{1-k}{1+k}$. Из первого уравнения получаем:

$$\nu(t) = u_0 e^{-at} + b\int_0^t e^{-a(t-\tau)}\mu(\lambda\tau)d\tau + c\int_0^t e^{-a(t-\tau)}h_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ b\int_0^t d\tau \int_{(1-k)\tau}^{\tau} e^{-a(t-\tau)} f((1-k)\tau - s, s)\,ds, \tag{10}$$

где

$$a = \frac{(1+k)\,b_3}{a_1 - a_2}, \quad b = \frac{a_2 + ka_1}{a_2 - a_1}, \quad c = \frac{1+k}{a_1 - a_2}.$$

Подставляя найденное выражение $\nu(t)$ во второе уравнение (9), приходим к функциональному уравнению для определения $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{(a_2 + a_1)(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)}\,\mu(\lambda^2 t) + \int_0^t G(t,\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau + H(t). \tag{11}$$

Здесь

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{a_2 + ka_1}{a_2 - a_1}\left[\dfrac{(1+k)\,a_3}{a_1 - a_2} - \dfrac{2b_3}{b_1 + b_2}\right] e^{-a\left(\lambda t - \frac{\tau}{\lambda}\right)}, & 0 \leqslant \tau \leqslant \lambda^2 t, \\ -\dfrac{(1+k)\,b_3}{b_2 + b_1}, & \lambda^2 t < \tau \leqslant t, \end{cases}$$

$$H(t) = h_2(t) + c_1 h_1(\lambda t) + c_2\int_0^{\lambda t} e^{-a(\lambda t - \tau)} h_1(\tau)\,d\tau + \int_t^{(1+k)t} f((1+k)\,t - \tau, \tau)\,d\tau -$$

$$- c_3\int_{\lambda(1-k)t}^{\lambda t} f(\lambda(1-k)\,t - \tau, \tau)\,d\tau + c_4\int_{\lambda(1-k)t}^{(1+k)t} f\left(\frac{\tau - (1-k)\,t}{2}, \frac{\tau + (1-k)t}{2}\right)d\tau +$$

$$+ c_5\int_0^{\lambda t} d\xi \int_{(1-k)\xi}^{\xi} e^{-a(\lambda t - \xi)} f((1-k)\,\xi - \tau, \tau)\,d\tau + c_6 u_0 e^{-a\lambda t},$$

где $c_1, \ldots, c_6$ — заданные числа.

Очевидно, что при сделанных предположениях относительно $f$, $h_1$ и $h_2$ функция $H(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \infty[$.

Если ввести операторы $A$ и $B$, действующие в пространстве $C^1[0, T]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ функций по закону

$$A\mu = \frac{(a_2 + a_1)(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)}\,\mu(\lambda^2 t), \quad B\mu = \int_0^t G(t,\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau,$$

то уравнение (11) можно записать в виде $\mu = A\mu + B\mu + H$. Так как $\lambda^2 < 1$, то оператор $A$ сжимающий на $C^1[0, T]$ (для любого заданного $T > 0$) относительно равномерной метрики в $C^1[0, T]$. Значит, предыдущее уравнение эквивалентно следующему [2]: $\mu = [I - A]^{-1}B\mu + [I - A]^{-1}H$, где $I$ — единичный оператор в $C^1[0, T]$. Но оператор $B$ вольтерров, и, очевидно, последнее уравнение имеет единственное решение $\mu(t) \in C^1[0, T]$ для любого $T > 0$. Подставляя найденное решение в (10), получим функцию $\nu$ из класса $C^2[0, T]$. Искомое решение задачи дается тогда формулой (8). Теорема доказана.

Замечания. 1. Условие (5) является существенным для корректности задачи (1)—(3), что подтверждается примером задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \left(0<t<\infty,\ -\frac{1}{3}t<x<\frac{1}{3}t\right),$$

$$\left[15\frac{\partial u}{\partial t}+17\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=-\frac{1}{3}t}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{3}t}=0, \qquad u(0,0)=0.$$

Здесь $\lambda=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(a_2+a_1)(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)(b_2+b_1)}=16>1$, $a_2-a_1=2\neq 0$, $b_2+b_1=$ $=1\neq 0$. Задача имеет нетривиальное решение $u(x,t)=4(t-x)^3+(t+x)^3$.

2. Условие (4) также существенно для корректности задачи, так как если оно не выполнено, то $\dfrac{(a_2+a_1)(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)(b_2+b_1)}=1$ и уравнение (11) либо неразрешимо, либо имеет бесчисленное множество решений [2].

3. Если заданные функции $f$, $h_1$ и $h_2$ обладают меньшей гладкостью, чем это указано в теореме, то легко решается вопрос о существовании и единственности обобщенного непрерывно дифференцируемого или непрерывного в $\bar{D}$ решения поставленной задачи.

4. Из приведенных рассуждений следует, что без наличия дополнительного условия (3) задача (1)—(2) либо неразрешима, либо имеет семейство решений, зависящее от произвольной постоянной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости.— Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, **20**, с. 87—104.
2. Харибегашвили С. С. Характеристическая задача для гиперболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 1, с. 123—135.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.I 1979 г.