УДК 517.9

Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык

Случайные колебания в системах третьего порядка

В последние годы появилось много работ, посвященных детерминированным колебаниям в системах третьего порядка [1, 2]. В данной статье исследованы случайные колебания под действием внешних случайных сил типа «белого шума», описываемые такими системами.

1. Метод статистической линеаризации. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dddot{x} + f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \dot{\xi}(t), \tag{1}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — белый шум с интенсивностью D. Заменив уравнение (1) линейным уравнением [3]

$$\dddot{x}_0 + \lambda \ddot{x}_0 + \beta \dot{x}_0 + \gamma x_0 + \alpha = \dot{\xi}(t), \tag{2}$$

где x_0 — центрированный случайный процесс, а коэффициенты $\lambda, \beta, \gamma, \alpha$ определяются из условия минимума выражения

$$\min_{\lambda,\beta,\gamma,\alpha} \langle (f(\ddot{x}_0, \dot{x}_0, x_0 + \langle x \rangle) - \lambda\ddot{x}_0 - \beta\dot{x}_0 - \gamma x_0 - \alpha)^2 \rangle, \tag{3}$$

получим

$$\begin{gathered}
\langle (f - \lambda\ddot{x}_0 - \beta\dot{x}_0 - \gamma x_0)\, \ddot{x}_0 \rangle = 0, \\
\langle (f - \lambda\ddot{x}_0 - \beta\dot{x}_0 - \gamma x_0)\, \dot{x}_0 \rangle = 0, \\
\langle (f - \lambda\ddot{x}_0 - \beta\dot{x}_0 - \gamma x_0)\, x_0 \rangle = 0, \\
\langle f(\ddot{x}_0, \dot{x}_0, x_0 + \langle x \rangle) \rangle - \alpha = 0,\ \alpha = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

С другой стороны, стационарная плотность вероятностей величин $\ddot{x}_0, \dot{x}_0, x_0$ уравнения (2) равна

$$W(\ddot{x}_0, \dot{x}_0, x_0) = h \exp\left\{-\frac{\lambda\beta - \gamma}{D}\dot{x}_0^2 - \frac{\gamma\beta}{D}x^2 - \frac{2\gamma}{D}x\ddot{x} - \frac{\lambda}{D}\ddot{x}^2\right\}. \tag{5}$$

Отсюда

$$\langle x_0 \dot{x}_0 \rangle = 0,\ \langle x_0 \ddot{x}_0 \rangle = 0. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем

$$\lambda = \frac{\langle f x_0 \rangle \langle x_0 \ddot{x}_0 \rangle - \langle f \ddot{x}_0 \rangle \langle x_0^2 \rangle}{\langle x_0 \ddot{x}_0 \rangle^2 - \langle \ddot{x}_0^2 \rangle \langle x_0^2 \rangle},\ \beta = \frac{\langle f \dot{x}_0 \rangle}{\langle \dot{x}_0^2 \rangle},$$

$$\gamma = \frac{\langle f \ddot{x}_0 \rangle \langle x_0 \ddot{x}_0 \rangle - \langle f x_0 \rangle \langle \ddot{x}_0^2 \rangle}{\langle x_0 \ddot{x}_0 \rangle^2 - \langle \ddot{x}_0^2 \rangle \langle x_0^2 \rangle}. \tag{7}$$

Определив с помощью уравнения (7) значения λ, β, γ и подставив их в (5), сможем найти нужные моменты. В качестве примера расмотрим уравнение Ван-Дер-Поля третьего порядка:

$$\dddot{x} + \eta\ddot{x} + \Omega^2\dot{x} + \eta\Omega^2 x - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} = \dot{\xi}(t). \tag{8}$$

Эквивалентное линейное уравнение имеет вид

$$\dddot{x} + \eta\ddot{x} + (\Omega^2 + \beta)\dot{x} + \eta\Omega^2 x = \dot{\xi}(t), \tag{9}$$

а уравнения (7) для λ, β, γ—вид

$$\lambda = \eta,\ \gamma = \eta\Omega^2,\ \beta = \varepsilon(\langle x^2 \rangle - 1)\,\varepsilon\left(\frac{D}{2\eta\beta\Omega^2} - 1\right),$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 2D(\eta\Omega^2\varepsilon)^{-1}}\right].$$

Второй момент $\langle x^2 \rangle$ равен

$$\langle x^2 \rangle = \frac{D}{2\eta\beta\Omega^2} = \frac{D}{\varepsilon\eta\Omega^2\left(-1 + \sqrt{1 + 2\frac{D}{\varepsilon\eta\Omega^2}}\right)}.$$

2. Метод уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК). Рассмотрим уравнение (1)

$$\dddot{x} + \eta\ddot{x} + \Omega^2 x + \eta\Omega^2\dot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma G(x, \dot{x}, \ddot{x})\,\xi(t) \tag{10}$$

и сделаем замену:

$$x = Ce^{-\eta t} + A\cos\psi,\ \dot{x} = -\eta Ce^{-\eta t} - A\Omega\sin\psi, \tag{11}$$
$$\ddot{x} = \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi,\ \psi = \Omega t + \theta.$$

Пользуясь формулой Ито [4], уравнение (10) приводим к системе

$$\dot{C} = \varepsilon e^{\eta t}\alpha_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\, e^{\eta t}\beta_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,\xi(t),$$
$$\dot{A} = \varepsilon\alpha_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,\xi(t), \tag{12}$$
$$\dot{\theta} = \varepsilon\alpha_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,\xi(t),$$

где

$$\alpha_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{\Omega^2 + \eta^2},$$

$$\alpha_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = -\frac{(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)\,F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{\Omega(\Omega^2 + \eta^2)} +$$
$$+ \frac{\sigma^2(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)^2\,G_1^2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{2A\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)^2},$$

$$\alpha_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)\,F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{2\Omega(\Omega^2 + \eta^2)} +$$
$$+ \frac{\sigma^2(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)\,G_1^2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{A^2\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)^2},$$

$$\beta_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{\sigma G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{\Omega^2 + \eta^2},\ \beta_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \tag{13}$$
$$= -\frac{\sigma(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)\,G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi}{\Omega(\Omega^2 + \eta^2)},\ \beta_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi) =$$
$$= \frac{\sigma(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)\,G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{A\Omega(\Omega^2 + \eta^2)},\ F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = F(Ce^{-\eta t} +$$
$$+ A\cos\psi, -\eta Ce^{-\eta t} - A\Omega\sin\psi, \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi),\ G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = G(C^{-\eta t} +$$
$$+ A\cos\psi, -\eta Ce^{-\eta t} - A\Omega\sin\psi, \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi).$$

Выполнив еще одну замену $D = Ce^{-\eta t}$, получим

$$\dot{D} = -\eta D + \varepsilon\alpha_1(D, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_1(D, A, \psi)\,\xi,$$
$$\dot{A} = \varepsilon\alpha_2(D, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(D, A, \psi)\,\xi, \tag{14}$$
$$\dot{\theta} = \varepsilon\alpha_3(D, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(D, A, \psi)\,\xi.$$

Очевидно, что в системе (14) переменные A, θ «медленные», а переменная D «быстрая». В силу непрерывной зависимости решения стохастического дифференциального уравнения Ито от параметра [5] при достаточно большом t можно принимать $D \approx 0$. Тогда вместо (14) рассмотрим

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \varepsilon\alpha_2(0, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(0, A, \psi)\,\dot{\xi}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon\alpha_3(0, A, \psi) + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(0, A, \psi)\,\dot{\xi}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для системы (15) можно применить метод усреднения, изложенный в [4]. После усреднения получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \varepsilon\bar{\alpha}_2(A_1) + \sigma_{22}(A_1)\,\dot{\xi}_1 + \sigma_{23}(A_1)\,\dot{\xi}_2, \\ \dot{\theta}_1 &= \varepsilon\bar{\alpha}_3(A_1) + \sigma_{32}(A_1)\,\dot{\xi}_1 + \sigma_{33}(A_1)\,\dot{\xi}_2, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — винеровские процессы, а матрицы $[\sigma_{ij}(A_1)]$ — квадратический корень матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_2^2) & \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_2\beta_3) \\ \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_2\beta_3) & \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_3^2) \end{Vmatrix}.$$

К системе (16) можно применить обычный метод уравнения ФПК. Стационарное уравнение ФПК, составленное для системы (16), имеет вид

$$\frac{\partial(\bar{\alpha}_2(A_1)W)}{\partial A_1} + \frac{\partial(\bar{\alpha}_3(A_1)W)}{\partial\theta_1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(K_{22}(A_1)W}{\partial A_1^2} + \frac{2\partial^2(K_{23}(A_1)W)}{\partial A_1\partial\theta_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2(K_{33}(A_1)W)}{\partial\theta_1^2}\right] = 0,$$

причем $K_{22}(A_1) = \underset{t}{M}(\beta_2^2), K_{23}(A_1) = \underset{t}{M}(\beta_2\beta_3), K_{33}(A_1) = \underset{t}{M}(\beta_3^2)$.

Рассмотрим два примера.

1. $\dddot{x} + \eta\ddot{x} + \Omega^2\dot{x} + \eta\Omega^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\,\dot{x} + \sqrt{\varepsilon}\;\sigma\dot{\xi}(t)$. После вычислений запишем

$$K_{22} = \frac{\sigma^2}{2\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)}, \quad \bar{\alpha}_2(A_1) = \frac{\sigma^2}{4A\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)} - \frac{A_1\eta(A_1^2 - 4)}{8(\Omega^2 + \eta^2)}.$$

Решив уравнение ФПК, получим $W_{\text{ст}}(A_1) = \chi A_1 \exp\left[\eta\,\frac{\Omega^2}{\sigma^2}\left(A_1^2 - \frac{A_1^4}{8}\right)\right]$. Эта функция достигает максимума при

$$A_1 = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{2\Omega^2\eta}}}. \tag{17}$$

Итак, при $\sigma \to 0$, $A \to 2$ получим известный результат [2]. При $\sigma \neq 0$ в системе (10) возможно колебание с амплитудой (17).

2. $\dddot{x} + \eta\ddot{x} + \Omega^2\dot{x} + \eta\Omega^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\,\dot{x} - \varepsilon h_0 \operatorname{sign}\dot{x}^2 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma\dot{\xi}$. Будем иметь

$$\bar{\alpha}_2(A_1) = \frac{\sigma^2}{4A_1\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)} - \frac{\eta}{\Omega^2 + \eta^2}\left[\frac{A_1^2}{2}\left(\frac{A_1^2}{4} - 1\right) + \frac{2h_0}{\pi\Omega}\right],$$

$$K_{22}(A_1) = \frac{\sigma^2}{2\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)},$$

а стационарная плотность вероятностей равна

$$W_{\text{ст}}(A_1) = \chi A_1 \exp\left[\frac{\eta\Omega^2}{\sigma^2}\left(A_1^2 - \frac{A_1^4}{8} - \frac{8h_0 A_1}{\pi\Omega}\right)\right].$$

Она достигает максимума при $A_1 = A_1^*$:

$$\frac{\sigma^2}{4\Omega^2} = \eta\left[\frac{A_1^{*2}}{2}\left(\frac{A_1^{*2}}{4} - 1\right) + \frac{2h_0 A_1^*}{\pi\Omega}\right]. \quad (18)$$

Сравнивая (17) с формулой (18), видим, что кулоновское трение уменьшает амплитуду стационарного случайного колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Srirangarajan H. R., Srinivasan P. Application of ultraspherical Polynomials to forced oscillations of a third order non-linear system.— J. Sound and Vibration, 1974, **36**, № 4.
2. Nguen van Dao. Non-linear oscillations of high order systems. National center for scientific research of Viet-nam.— Ha-noi, 1979.
3. Казаков И. Е. Статистическая теория системы управления в пространстве состояний.— М. : Наука, 1975.
4. Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. Применение асимптотических методов в стохастических системах. — В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев : 1976.
5. Гихман И. И. Дифференциальные уравнения со случайными функциями.— Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Ужгород, 1964. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964.

НЦНИ СРВ
Институт механики

Поступила в редакцию
28.IV 1980 г.