УДК 517.948,519.55

Л. П. Нижник, В. Г. Тарасов

Обратная задача рассеяния для дискретного по направлениям уравнения переноса

Рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\mathbf{v}^{(i)} \operatorname{grad} u_i(x) + \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x)\, u_j(x) = 0, \tag{1}$$

где $i = 1, \ldots, n$; $x \in E_2$, $\mathbf{v}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — попарно неколлинеарные единичные орты на плоскости; $C(x) = \{C_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ — матричный потенциал; $u_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — искомые функции, которые описывают в точке x поток частиц или волн в направлении $\mathbf{v}^{(i)}$.

Система дифференциальных уравнений (1) является дискретным аналогом уравнения переноса [1—3] и описывает процессы переноса в дискретном фиксированном наборе направлений $\mathbf{v}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Систему уравнений (1) будем называть дискретным уравнением переноса.

Основной результат настоящей заметки заключается в доказательстве теоремы единственности в обратной задаче рассеяния и построении алгоритма решения этой задачи. Результат получен в предположении, что коэффициенты дискретного уравнения переноса (1) являются комплекснозначными измеримыми функциями, допускающими оценку

$$|C_{ij}(x)| \leqslant c\,(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}, \ \varepsilon > 0, i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

При этом будем считать, что $C_{ii}(x) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, так как этого всегда можно добиться, умножая $u_i(x)$ на $\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} C_{ii}(x + v^{(i)}t)\,dt\right\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Если одну из независимых переменных в уравнении (1) считать временем t, то дискретное уравнение переноса (1) представит собой эволюционную гиперболическую систему дифференциальных уравнений с нестационарным потенциалом, для которой прямая и обратная задачи рассеяния изучены в [4, 5]. Однако непосредственно использовать эти результаты для системы (1) можно лишь в случае, когда все $v^{(i)}$ лежат в полуплоскости $t > 0$, так как только в этом случае задача рассеяния для дискретного уравнения переноса (1) совпадает с задачей рассеяния для эволюционной гиперболической системы уравнений. Кроме того, метод изучения обратной задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса, принятый в настоящей работе, отличен от метода работ [4, 5] и является «дискретным» аналогом метода работы [6], где исследована обратная задача рассеяния для «непрерывного» уравнения переноса.

1. Рассмотрим задачу рассеяния для дискретного уравнения переноса (1). Пусть в уравнении (1) потенциал $C(x) \equiv 0$. Обычная вектор-функция $u(x)$ в обобщенном смысле удовлетворяет невозмущенному уравнению (1) $v^{(i)} \operatorname{grad} u_i(x) = 0$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $u(x) = \{\varphi_i(xv_\perp^{(i)})\}_{i=1}^{n}$, где $\varphi_i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — локально интегрируемые функции, а индекс $\perp$ обозначает поворот вектора на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Если в уравнении (1) потенциал $C(x)$ удовлетворяет условию (2), то на бесконечности решения ведут себя как решения невозмущенного уравнения.

Л е м м а 1. *Всякое ограниченное решение $u(x)$ дискретного уравнения переноса* (1) *с потенциалом $C(x)$, удовлетворяющим оценке* (2), *представимо в виде*

$$u_i(x) = a_i(xv_\perp^{(i)}) + v_i(x), \quad \lim_{R \to -\infty} \sup_{xv^{(i)} \leqslant R} |v_i(x)| = 0, \tag{3}$$

$$u_i(x) = b_i(xv_\perp^{(i)}) + w_i(x), \quad \lim_{R \to +\infty} \sup_{xv^{(i)} \geqslant R} |w_i(x)| = 0. \tag{4}$$

Функции $u_i(x) = a_i(xv_\perp^{(i)})$ и $u_i(x) = b_i(xv_\perp^{(i)})$ — решения невозмущенного уравнения (1) и описывают соответственно падающий и рассеянный потоки. Вектор-функции $a(\xi) = \{a_i(\xi)\}_{i=1}^{n}$ и $b(\xi) = \{b_i(\xi)\}_{i=1}^{n}$ описывают профили этих потоков.

Задачу рассеяния для дискретного уравнения переноса (1) можно поставить следующим образом: по заданной ограниченной вектор-функции $a(\xi)$ найти ограниченное решение $u(x)$ дискретного уравнения переноса (1), для которого справедливо асимптотическое представление (3).

Если решение задачи рассеяния существует, то согласно (4) это решение однозначно определяет профиль рассеянного потока $b(\xi)$. Таким образом, вектор-функции $a(\xi)$, задающей профиль падающего потока, однозначно соответствует вектор-функция $b(\xi)$, определяющая рассеянный поток, и тем самым определен оператор рассеяния

$$Sa(\xi) = b(\xi). \tag{5}$$

Этот оператор является матричным оператором $S = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, и в дальнейшем изучается в пространстве $L_2(-\infty, +\infty; E_n)$ суммируемых с квадратом на всей оси вектор-функций со значениями в E_n.

Рассмотрим пространство $L_\infty(E_2, E_n)$ существенно ограниченных на плоскости вектор-функций со значениями в E_n. Легко показать, что разрешимость задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса (1) эквивалентна разрешимости системы интегральных уравнений

$$u_i(x) = a_i(x\nu_\perp^{(i)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} C_{ij}(x + \nu^{(i)}s)\, u_j(x + \nu^{(i)}s)\, ds, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (6)$$

в пространстве $L_\infty(E_2, E_n)$. Систему (6) будем называть системой интегральных уравнений задачи рассеяния.

Установим достаточные условия разрешимости задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса (1).

Теорема 1. *Если потенциал $C(x)$ в дискретном уравнении переноса* (1) *достаточно малый (например, константа в оценке* (2) *удовлетворяет неравенству $c < (\pi n)^{-1}$), то существует и единственно решение задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса* (1).

Доказательство теоремы получаем из разрешимости системы интегральных уравнений задачи рассеяния методом последовательных приближений.

Укажем еще одно достаточное условие разрешимости задачи рассеяния, не требующее малости $C(x)$.

Теорема 2. *Пусть потенциал $C(x)$ удовлетворяет оценке* (2) *и является кососимметрическим, т. е. $C_{ij}(x) = -\bar{C}_{ji}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, тогда существует и единственно решение задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса* (1). *Оператор рассеяния S в пространстве L_2 унитарен.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о разрешимости задачи рассеяния для односкоростного уравнения переноса, приведенному в [7].

2. При исследовании свойств оператора рассеяния важную роль играет специальное интегральное представление решений дискретного уравнения переноса (1).

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — ограниченное решение дискретного уравнения переноса* (1), *а α — допустимый орт, т. е. орт неколлинеарный ни с одним из векторов $\nu_\perp^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, n$). Тогда существует и единственна ограниченная вектор-функция $h^{(\alpha)}(\xi)$, которую будем называть α-прообразом решения $u(x)$, такая, что имеет место интегральное представление решения*

$$u_i(x) = h_i^{(\alpha)}(x\nu_\perp^{(i)}) - \sum_{j,\alpha\nu^{(j)}>0} \int_{-\infty}^{x\nu_\perp^{(j)}} H_{ij}(x, y)\, h_j^{(\alpha)}(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{j,\alpha\nu^{(j)}<0} \int_{x\nu_\perp^{(j)}}^{+\infty} H_{ij}(x, y)\, h_j^{(\alpha)}(y)\, dy, \quad i, j = 1, \ldots, n. \quad (7)$$

Наоборот, для любой ограниченной вектор-функции $h^{(\alpha)}(\xi)$ и любого допустимого орта α, формула (7) *дает ограниченное решение дискретного уравнения переноса* (1). *Матричное ядро $H(x, y) = \{H_{ij}(x, y)\}_{i,j=1}^{n}$ интегрального представления* (7) *однозначно определяется уравнением* (1), *допускает оценку*

$$|H_{ij}(x, y)| \leqslant k\left[(1 + |x\nu_\perp^{(i)}|)(1 + |y|)\right]^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \varepsilon > 0, \; i, j = 1, \ldots, n, \quad (8)$$

и связано с потенциалом $C(x)$ соотношением

$$C_{ij}(x) = (\nu^{(i)}\nu_\perp^{(j)})\, H_{ij}(x, x\nu_\perp^{(j)}), \quad i, j = 1, \ldots, n. \quad (9)$$

Доказательство леммы основанно на том, что ядра $H_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют некоторой системе интегральных уравнений вольтерровского типа, однозначная разрешимость которых доказывается методом последовательных приближений.

Интегральное представление решений (7) можно записать в операторном виде. Для этого определим в $L_2(E_n)$ ограниченные операторы $\Gamma_{\eta\alpha}$ и J_α равенствами

$$\Gamma_{\eta\alpha}\varphi(\xi) = \{\varphi_i(\xi + \eta(\alpha\nu_\perp^{(i)}))\}_{i=1}^n, \quad J_\alpha\varphi(\xi) = \{\varphi_i(\xi(\alpha\nu^{(i)}))\}_{i=1}^n. \tag{10}$$

При этом интегральное представление (7) примет вид

$$u(x) = (I + \overset{+}{V}(\alpha, \eta))\, J_\alpha\Gamma_{\eta\alpha}h^{(\alpha)}(\xi), \tag{11}$$

где $\overset{+}{V}(\alpha, \eta)$ — матричный вольтерровский интегральный оператор с переменным верхним пределом интегрирования. Матричное ядро оператора $\overset{+}{V}(\alpha, \eta)$ связано с ядром $H(x, y)$ интегрального представления (7) следующими равенствами:

$$\overset{+}{V}_{ij}(\alpha, \eta; \xi, t) = -(\alpha\nu^{(j)})\, H_{ij}(\xi\alpha_\perp + \eta\alpha, t(\alpha\nu^{(j)}) + \eta(\alpha\nu_\perp^{(j)})), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Отсюда, используя оценку (8) и равенство (9), делаем вывод, что ядро $\overset{+}{V}(\alpha, \eta; \xi, t) = \{\overset{+}{V}_{ij}(\alpha, \eta; \xi, t)\}_{i,j=1}^n$ является ядром Гильберта — Шмидта и потенциал $C(x)$ выражается через него с помощью равенства

$$C_{ij}(x) = \frac{\nu^{(i)}\nu_\perp^{(j)}}{\alpha\nu^{(j)}}\, \overset{+}{V}_{ij}(\alpha, \alpha x; \alpha_\perp x, \alpha_\perp x), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Если в представлении (11) вектор α заменить на $-\alpha$, то получим связь решения $u(x)$ уравнения (1) с $(-\alpha)$-прообразом этого решения:

$$u(x) = (I + \overline{V}(\alpha, \eta))\, J_\alpha\Gamma_{\eta\alpha}h^{(-\alpha)}(\xi). \tag{14}$$

Здесь $\overline{V}(\alpha, \eta)$ — матричный вольтерровский интегральный оператор с переменным нижним пределом интегрирования, ядро которого связано с ядром оператора $\overset{+}{V}(\alpha, \eta)$ равенством $\overline{V}(\alpha, \eta; \xi, t) = \overset{+}{V}(-\alpha, -\eta; -\xi, -t)$.

Пусть S^Φ — оператор, связывающий α-и $(-\alpha)$-прообразы одного и того же решения дискретного уравнения переноса (1):

$$S^\Phi h^{(-\alpha)}(\xi) = h^{(\alpha)}(\xi). \tag{15}$$

Приравнивая (11) и (14), получаем факторизацию оператора S^Φ.

Лемма 3. *Оператор $J_\alpha\Gamma_{\eta\alpha}S^\Phi\Gamma_{\eta\alpha}^{-1}J_\alpha^{-1}$ допускает правую факторизацию на вольтерровские операторы Гильберта — Шмидта:*

$$J_\alpha\Gamma_{\eta\alpha}S^\Phi\Gamma_{\eta\alpha}^{-1}J_\alpha^{-1} = (I + \overset{+}{V}(\alpha, \eta))^{-1}(I + \overline{V}(\alpha, \eta)). \tag{16}$$

3. Перейдем к изучению свойств оператора рассеяния. Пусть α — допустимый единичный орт. Рассмотрим проекторы P_α и Q_α в пространстве $L_2(-\infty, +\infty; E_n)$:

$$P_\alpha f(\xi) = \{\Theta(\alpha\nu^{(i)})\, f_i(\xi)\}_{i=1}^n, \quad Q_\alpha = I - P_\alpha, \tag{17}$$

где Θ — единичная функция Хевисайда.

В силу леммы 2 каждой ограниченной вектор-функции $h^{(\alpha)}(\xi)$ соответствует ограниченное решение $u(x)$ дискретного уравнения переноса (1), которое согласно лемме 1 однозначно определяет профили падающего $a(\xi)$ рассеянного $b(\xi)$ потоков. При этом возникают операторы $A_+(\alpha)$, $A_-(\alpha)$

$$f_\alpha(\xi) = A_-(\alpha)\, h^{(\alpha)}(\xi), \quad g_\alpha(\xi) = A_+(\alpha)\, h^{(\alpha)}(\xi), \tag{18}$$

где

$$f_\alpha(\xi) = P_\alpha a(\xi) + Q_\alpha b(\xi), \quad g_\alpha(\xi) = Q_\alpha a(\xi) + P_\alpha b(\xi). \tag{19}$$

Свойства операторов $A_-(\alpha)$, $A_+(\alpha)$ характеризует следующая лемма.

Л е м м а 4. *Операторы* $A_-(\alpha)$ *и* $A_+(\alpha)$ — *матричные ограниченные операторы в пространстве* $L_2(-\infty, +\infty; E_n)$, *у которых на диагонали стоят операторы, отличающиеся от единичного на вольтерровский интегральный оператор Гильберта—Шмидта с переменным верхним (соответственно нижним) пределом интегрирования. При определенной перенумерации компонент вектор-функций операторы* $A_-(\alpha)$ *и* $A_+(\alpha)$ *превращаются в верхнюю и нижнюю треугольные операторные матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Явный вид операторов $A_-(\alpha)$ и $A_+(\alpha)$ легко получить из интегрального представления (7) и определения падающего и рассеянного потоков. При этом видна структура диагональных элементов этих операторов. Внедиагональные элементы операторных матриц $A_-(\alpha)$ и $A_+(\alpha)$ являются интегральными операторами Гильберта — Шмидта, ядра которых содержат в качестве множителей функции $\Theta_-(\alpha, \nu^{(i)}, \nu^{(j)}) = \Theta(\nu^{(i)}\nu^{(j)}_\perp)\,\Theta(-\alpha\nu^{(i)}) + \Theta(\nu^{(i)}\nu^{(j)}_\perp)\,\Theta(\alpha\nu^{(i)}) - \Theta(\alpha\,\nu^{(j)})$ и $\Theta_+ = 1 - \Theta_-$.

Установим структуру операторов $A_-(\alpha)$ и $A_+(\alpha)$. С этой целью произведем перенумерацию векторов $\nu^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, так, что если все векторы $\nu^{(i)}$, для которых $\alpha\nu^{(i)} < 0$, заменить на $-\nu^{(i)}$ с сохранением их нового номера, то при этом получим множество векторов, упорядоченное против часовой стрелки. Так как номера компонент вектор-функций связаны с номерами векторов $\nu^{(i)}$, то перенумерация векторов $\nu^{(i)}$ порождает перенумерацию компонент. Легко видеть, что при вышеописанной перенумерации $\Theta_-(\alpha, \nu^{(i)}, \nu^{(j)}) = 1$ тогда и только тогда, когда новый номер вектора $\nu^{(i)}$ больше нового номера вектора $\nu^{(j)}$. Таким образом, при новой нумерации матричные операторы $A_-(\alpha)$ и $A_+(\alpha)$ треугольны. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению обратной задачи рассеяния для дискретного уравнения переноса (1). Эта задача состоит в нахождении потенциала $C(x)$ в уравнении (1) по заданному оператору рассеяния. Основной результат дает следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Пусть* S — *оператор рассеяния для дискретного уравнения переноса* (1) *с потенциалом* $C(x)$, *удовлетворяющим условию* (2). *Тогда потенциал* $C(x)$ *однозначно определяется по известному оператору* S. *При этом существует оператор*

$$S_\Phi = [Q_\alpha + P_\alpha S]\,[P_\alpha + Q_\alpha S]^{-1}, \tag{20}$$

допускающий факторизацию

$$S_\Phi = A_+(\alpha)\,A_-^{-1}(\alpha), \tag{21}$$

где операторы $A_+(\alpha)$ и $A_-(\alpha)$ *обладают свойствами, указанными в лемме* 1. *Построенный по факторизационным множителям* $A_-(\alpha)$ *и* $A_+(\alpha)$ *оператор*

$$S^\Phi = A_-^{-1}(\alpha)\,A_+(-\alpha), \tag{22}$$

допускает факторизацию (16). *Потенциал* $C(x)$ *в уравнении* (1) *выражается через множители факторизации* (16) *согласно формуле* (13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение оператора рассеяния, из равенств (18) и (19) имеем

$$(P_\alpha + Q_\alpha S)\,a(\xi) = A_-(\alpha)\,h^{(\alpha)}(\xi). \tag{23}$$

Так как оператор $A_-(\alpha)$ ограничено обратим в L_2, то из (23) делаем вывод, что область значения фредгольмового оператора $P_\alpha + Q_\alpha S$ есть все пространство L_2. Поэтому существует оператор $[P_\alpha + Q_\alpha S]^{-1}$, а следовательно, и оператор S_Φ, определенный равенством (20). Факторизация (21) следует из определения S_Φ и равенств (18), (19), а факторизация (22) — из определения S^Φ и (18). Факторизационные свойства оператора S^Φ и связь (13) потенциала с факторизационными множителями была установлена ранее.

Сформулированный в теореме 3 результат представляет эффективную процедуру нахождения потенциала по известному оператору рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.— Тр. Математического ин-та АН СССР, 1961, **61**, с. 157.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов.— М. : Госатомиздат, 1961.— 666 с.
3. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.— 384 с.
4. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев: Наук. думка, 1973.— 182 с.
5. Нижник Л. П., Тарасов В. Г. Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений.— ДАН СССР, 1977, **233**, № 3, с. 300—303.
6. Нижник Л. П., Тарасов В. Г. Обратная задача рассеяния для односкоростного уравнения переноса.— ДАН СССР, 1978, **242**, № 6, с. 1307—1310.
7. Тарасов В. Г. Задача рассеяния для уравнения переноса.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 3, с. 421—425.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.X 1978 г.