УДК 517.934

Б. И. Сокил, А. Ф. Барвинский

Об асимптотическом разложении для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений

Строится асимптотическое разложение в «нерезонансном» случае системы двух существенно нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение колебательной системы, находящейся под воздействием внешнего периодического возбуждения. В основе построения асимптотического разложения для рассматриваемой системы уравнений лежит идея u-методики [1] с использованием периодических Ateb-функций [2].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} + \alpha y^{\nu_1} = \varepsilon f(x, y, \nu t); \quad \dot{y} - x^{\nu_2} = \varepsilon g(x, y, \nu t), \tag{1}$$

где $f(x, y, \nu t)$; $g(x, y, \nu t)$ — аналитические 2π-периодические по отношению к νt функции; α и ν — постоянные, причем $\alpha > 0$; ε — малый параметр; ν_s $(s = 1, 2)$ — числа вида $\nu_s = \dfrac{2n_s + 1}{2m_s + 1}$ $(m_s;\ n_s = 0, 1, 2, \ldots)$.

К решению указанных уравнений приводится ряд задач нелинейной механики [3, 4] и математической физики [5]. Для автономного случая система (1) рассматривалась в [6].

Решение системы (1) представим в виде асимптотических рядов

$$y = u(a, \psi) + \varepsilon U_1(a, u, \varphi) + \varepsilon^2 U_2(a, u, \varphi) + \ldots;$$
$$x = v(a, u) + \varepsilon V_1(a, u, \varphi) + \varepsilon^2 V_2(a, u, \varphi) + \ldots, \tag{2}$$

где $\varphi = \nu t$, $u(a, \psi)$, $v(a, u)$, $U_j\ (a, u, \varphi)$, $V_j(a, u, \varphi)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические по ψ и φ функции, удовлетворяющие условиям

$$u(a, \psi)\,|_{\psi=\pi n} = (-1)^n a;\ v(a, u)\,|_{u=\pm a} = 0;$$
$$U_j(a, u, \varphi)\,|_{u=\pm a} = V_j(a, u, \varphi)\,|_{u=\pm a} = 0, \tag{3}$$

а параметры a и ψ определяются дифференциальными соотношениями вида

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \ldots,\quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a) + \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \ldots. \tag{4}$$

В последнем выражении $\theta = \psi - \varphi$ — разность фаз; $\omega(a)$; $A_j(a, \theta)$ и $B_j(a, \theta)$ — некоторые неизвестные функции, которые следует определить так, чтобы соотношения (2) удовлетворяли исходной системе (1), если в них вместо a и ψ подставить функции времени, выраженные (4).

Подставляя разложение (2) в дифференциальные уравнения (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{1}{\omega(a)} v^{\nu_2} = 0;\quad \frac{\partial v}{\partial u} + \alpha v^{-\nu_2} u^{\nu_1} = 0: \tag{5}$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial u} v^{\nu_2} + \nu \frac{\partial U_j}{\partial \varphi} - \nu_2 v^{\nu_2 - 1} V_j = G_j(a, u, \varphi) + \alpha_1(a, u) A_j(a, \theta) + \beta_1(a, u) B_j(a, \theta);$$
$$\frac{\partial V_j}{\partial u} v^{\nu_2} + \nu \frac{\partial V_j}{\partial \varphi} + \alpha \nu_1 u^{\nu_1 - 1} U_j = F_j(a, u, \varphi) + \alpha_2(a, u) A_j(a, \theta) + \beta_2(a, u) B_j(a, \theta), \tag{6}$$

где $G_j(a, u, \varphi)$; $F_j(a, u, \varphi)$; $\alpha_s(a, u)$ и $\beta_s(a, u)$ — некоторые известные функции.

Из системы (5) при условиях (3) находим $v(a, u) = (-1)^k \times \left[\alpha \dfrac{\nu_2 + 1}{\nu_1 + 1} (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})\right]^{-\frac{1}{\nu_2+1}}$ и неявные соотношения, определяющие функцию $u(a, \psi)$:

$$\psi = 2(r-1)\pi - \omega(a) \int\limits_a^u \left[\alpha \frac{\nu_2 + 1}{\nu_1 + 1} (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})\right]^{-\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} du,$$

$$\text{при } \begin{cases} a \geqslant u \geqslant -a; \\ 2(r-1)\pi \leqslant \psi \leqslant (2r-1)\pi; \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi = (2r-1)\pi + \omega(a) \int\limits_{-a}^u \left[2 \frac{\nu_2 + 1}{\nu_1 + 1} (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})\right]^{-\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} du,$$

$$\text{при } \begin{cases} -a \leqslant u \leqslant a; \\ (2r-1)\,\pi \leqslant \psi \leqslant 2r\pi, \end{cases}$$

где $k = 1$ для $-a \leqslant u \leqslant a$ и $k = 2$ для $a \geqslant u \geqslant -a$.

Исходя из определения периодических Ateb-функций [2] и учитывая соотношения (7), решение невозмущенной ($\varepsilon = 0$) системы (1) запишем так:

$$y = a\,\mathrm{ca}\,(\nu_1, \nu_2, l\psi); \quad l = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_1}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_2}\right)}{\pi\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_1}+\dfrac{1}{1+\nu_2}\right)}; \quad x = \left(a\,\frac{\nu_2+1}{\nu_1+1}\right)^{\frac{1}{\nu_2+1}} \times$$

$$\times\, a^{\frac{\nu_1+1}{\nu_2+1}}\,\mathrm{sa}\,(\nu_2, \nu_1, l\psi), \tag{8}$$

где $\mathrm{ca}\,(\ldots)$, $\mathrm{sa}\,(\ldots)$ — периодические Ateb-функции.

Из условия 2π-периодичности решения (8) легко получить выражение для функции $\omega\,(a)$:

$$\omega\,(a) = \pi\,(\nu_1+1)\left(\alpha\,\frac{\nu_2+1}{\nu_1+1}\right)^{\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_1}+\dfrac{1}{1+\nu_2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_1}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{1+\nu_2}\right)}\, a^{\frac{\nu_1\nu_2-1}{1+\nu_2}}. \tag{9}$$

Перейдем к решению системы (6). С этой целью представим ее в виде

$$v^{\nu_2+1}\,\frac{\partial^2 U_j}{\partial u^2} + \nu^2 v^{1-\nu_2}\,\frac{\partial^2 U_j}{\partial \varphi^2} + 2\nu v\,\frac{\partial^2 U_j}{\partial u \partial \varphi} - \alpha u^{\nu_1}\,(1 + \nu\,(1-\nu_2)\,v^{-\nu_2}) \times$$

$$\times \frac{\partial U_j}{\partial u} + \alpha\nu_1\nu_2 u^{\nu_1+1} U_j = \Phi_j\,(a, u, \varphi) + \alpha_0\,(a, u)\,A_j\,(a, \theta) + \beta_0\,(a, u)\,B_j\,(a, \theta), \tag{10}$$

где $\Phi_j\,(a, u, \varphi)$, $\alpha_0\,(a, u)$ и $\beta_0\,(a, u)$ выражаются через правые части уравнений (6).

Решение дифференциальных уравнений (10) представим в виде

$$U_j\,(a, u, \varphi) = \sum_n U_j^{(n)}\,(a, u)\exp\,(in\varphi). \tag{11}$$

При этом предполагается, что функции $A_j\,(a, \theta)$ и $B_j\,(a, \theta)$ также представляются рядами

$$A_j\,(a, \theta) = \sum_n A_j^{(n)}\,(a)\exp\,(-in\theta); \quad B_j\,(a, \theta) = \sum_n B_j^{(n)}\,(a)\exp\,(-in\theta). \tag{12}$$

Подставляя (11), (12) в дифференциальное соотношение (10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках θ, получаем

$$\alpha\,\frac{\nu_2+1}{\nu_1+1}\,(a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})\,\frac{\partial^2 U_j^{(n)}}{\partial u^2} - (\alpha u^{\nu_1} + 2i\nu n v)\,\frac{\partial U_j^{(n)}}{\partial u} + [i\nu n\alpha\,(1-\nu_2) \times$$

$$\times\, u^{\nu_1} v^{\nu_2} - n^2\nu^2 v^{1-\nu_2} + \alpha\nu_1\nu_2 u^{\nu_1-1}]\,U_j^{(n)} = \Phi_j^{(n)}\,(a, u) + \alpha_0\,(a, u)\,A_j^{(n)}\,(a) +$$

$$+\, \beta_0\,(a, u)\,B_j^{(n)}\,(a), \tag{13}$$

где $\Phi_j^{(n)}\,(a, u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \Phi_j\,(a, u, \varphi)\exp\,(-in\varphi)\,d\varphi.$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (13), т. е.

$$L(p, U_j^{(n)}) = \alpha \frac{\nu_2+1}{\nu_1+1}(a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})\, p^2 U_j^{(n)} - (\alpha u^{\nu_1} + 2i\nu n v)\, p U_j^{(n)} +$$

$$+ [in\nu\alpha(1-\nu_2)\, u^{\nu_1} v^{-\nu_2} - n^2\nu^2 v^{1-\nu_2} + \alpha\nu_1\nu_2 u^{\nu_1-1}]\, U_j^{(n)} = 0,\; p = \frac{\partial}{\partial u}\,. \quad (14)$$

Легко проверить, что частными решениями (14) являются функции

$$U_{j1}^{(n)}(a, u) = (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} \exp(in\nu\rho(a, u));\quad U_{j2}^{(n)}(a, u) =$$

$$= (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} \exp(in\nu\rho(a, u)) \int_0^u (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}} du, \quad (15)$$

где $\rho(a, u) = \int_0^u (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{-\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} du.$

Определим функции $A_j^{(n)}(a)$ и $B_j^{(n)}(a)$. При определении указанных функций используются леммы.

Лемма 1. *Пусть* $L(p, U_j^{(n)})$ — *оператор вида* (14), *а функции* $U_j^{(n)}$ *удовлетворяют условиям*

$$U_j^{(n)}|_{u=\pm a} = 0, \quad (16)$$

тогда выполняется тождество

$$\int_{-a}^{a} [L(p, U_j^{(n)}) \exp(-in\nu\rho(a, u))]\, du = 0. \quad (17)$$

Лемма 2. *Пусть* $L(p, U_j^{(n)})$ — *оператор, а* $U_j^{(n)}$ — *функции, описанные в лемме* 1. *Тогда существует и единственное такое* $\lambda = -\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}$, *что выполняется тождество*

$$\int_{-a}^{a} \left\{ \exp(-i\nu n\rho(a, u)) \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{\lambda} d\bar{u}\, L(P, U_j^{(n)}) \right\} du \equiv 0. \quad (18)$$

Справедливость лемм легко проверяется интегрированием по частям с учетом условий (16).

Используя результаты лемм 1 и 2, из (13) получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $A_j^{(n)}(a)$ и $B_j^{(n)}(a)$:

$$\bar{\alpha}_0(a) A_j^{(n)}(a) + \bar{\beta}_0(a) B_j^{(n)}(a) = \bar{\Phi}_j^{(n)}(a);\quad \tilde{\alpha}_0(a) A_j^{(n)}(a) + \tilde{\beta}_0(a) B_j^{(n)}(a) = \tilde{\Phi}_j^{(n)}(a), \quad (19)$$

где

$$\bar{\alpha}_0(a) = \int_{-a}^{a} \alpha_0(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u))\, du;$$

$$\bar{\beta}_0(a) = \int_{-a}^{a} \beta_0(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u))\, du;\; \tilde{\alpha}_0(a) = \int_{-a}^{a} \Big[\alpha_0(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u)) \times$$

$$\times \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}} d\bar{u} \Big] du;\quad \tilde{\beta}_0(a) = \int_{-a}^{a} \Big[\beta_0(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u)) \times$$

$$\times \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}} d\bar{u} \Big] du;\quad \bar{\Phi}_j^{(n)}(a) = \int_{-a}^{a} \Phi_j^{(n)}(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u))\, du;$$

$$\tilde{\Phi}_j^{(n)}(a) = \int_{-a}^{a} \left[\Phi_j^{(n)}(a, u) \exp(-i\nu n\rho(a, u)) \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_1+1}{\nu_1+1}} d\bar{u} \right] du.$$

Определив функции $A_j^{(n)}(a)$ и $B_j^{(n)}(a)$, учитывая (15), находим частное решение неоднородного уравнения (13):

$$U_j^{(n)} = (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{\frac{\nu_2}{\nu_2+1}} \exp(i\nu n\rho(a, u)) \left\{ \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}} d\bar{u} \times \right.$$

$$\times \int [\Phi_{j0}^{(n)}(a, u)(a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{\frac{1}{1+\nu_2}} \exp(-i\nu n\rho(a, u))] du - \int \left[\Phi_{j0}^{(n)}(a, u) \times \right.$$

$$\left. \left. \times (a^{\nu_1+1} - u^{\nu_1+1})^{\frac{1}{\nu_2+1}} \exp(-i\nu n\rho(a, u)) \int_0^u (a^{\nu_1+1} - \bar{u}^{\nu_1+1})^{-\frac{2\nu_2+1}{\nu_2+1}} d\bar{u} \right] du \right\}, \quad (20)$$

где $\Phi_{j0}^{(n)}(a, u)$ — правая часть уравнения (13).

Таким образом, соотношения (4), (8) и (20) с учетом (9) и (19) дают возможность исследовать колебательный процесс системы, описываемой уравнениями (1).

Изложенные результаты легко переносятся на дифференциальные уравнения второго порядка вида $\ddot{y} + \omega_0^2 y^{\nu_1} = \varepsilon f_0(y, \dot{y}, \nu t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольський Ю. О., Сеник П. М. Побудова асимптотичного розв'язку автономної системи з сильною нелінійністю.— Допов. АН УРСР, 1961, № 7, с. 839—844.
2. Сеник П. М. Обернення неповної Beta-функції. — Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 3, с. 325—333.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— 777с.
4. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.— 204 с.
5. Филимонов А. М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 11, с. 2076—2084.
6. Сеник П. М., Сокіл Б. І. Про використання u-методики для одного класу коливних систем.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 1, с. 12—16.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
28.XII 1978 г.