УДК 517.53

А. Н. Фридман

Оценки снизу субгармонических функций

В статье получены новые оценки снизу для функций, субгармонических в $D(R) = \{z : |z| < R\}$, $R \leqslant \infty$. Класс таких функций обозначим через $SH(R)$. Через $\delta SH(R)$ обозначим класс так называемых δ-субгармонических функций в $D(R)$, т. е. $u \in \delta SH(R)$, если $u = u_1 - u_2$, где $u_1, u_2 \in SH(R)$; через $\Omega(R)$ — класс положительных на $0 \leqslant x < R$ функций, стремящихся к $+\infty$ при $x \to R$.

Доказанная ниже теорема улучшает оценку работы [1], но вне более «массивного» множества — множества кружков нулевой линейной плотности, т. е. C^0-множества [2, с. 119—120].

Теорема 1. *Пусть* $u(z) \in \delta SH(\infty)$ *с характеристикой* $T(r, u)$ [3]. *Тогда для любой* $A(x) \in \Omega(\infty)$ *и* $\theta \in]0, 1[$ *можно указать* C^0*-множество, вне которого выполняется* ($|z| = r$)

$$u(z) > -A(r)\,T(r + \theta r, u). \tag{1}$$

В общем случае в теореме 1 нельзя брать $\theta = 0$. Это следует из примера статьи [4] (см. также [5, с. 60]). Более того, если $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, то (1) может не выполняться, даже если справа вместо $T(r, u)$ поставить $M(r, u) = \max\{u(z) : |z| = r\}$ (см. [6, § 10]). Однако постоянную θ можно заменить величиной $o(1)$. То, что в теореме 1, вообще говоря, нельзя заменить функцию $A(r) \in \Omega(\infty)$ сколь угодно большой постоянной A, вытекает из следствия, использующего в качестве функции сравнения $V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [2, с. 47].

Следствие 1. *Пусть* $u(z) \in \delta SH(\infty)$ *имеет порядок* ρ, $0 < \rho < \infty$, *и* $\rho(r)$ *— некоторый уточненный порядок такой, что*

$$\Delta = \varlimsup_{r\to\infty} T(r, u)/V(r) < \infty. \tag{2}$$

Тогда для произвольной функции $A(x) \in \Omega(\infty)$ *можно указать* C^0*-множество, вне которого выполняется* ($|z| = r$)

$$u(z) > -A(r)\,V(r). \tag{3}$$

Существуют субгармонические функции поярдка ρ, $0 < \rho < \infty$, *такие, что для любой постоянной* A, $0 < A < \infty$, *неравенство* (3) *с* $A(r) \equiv A$ *не выполняется, какое бы* C^0*-множество мы ни выбрасывали из* $\mathbf{C}$.

Замечание 1. Первое утверждение следствия 1 (и даже более сильное) может быть получено из результата работы [7, теорема 4].

Обозначим через $c(z_k, \alpha_k)$ круг $\{z : |z - z_k| \leqslant \alpha_k\}$. В дальнейшем будем считать, что для функции $u(z) \in \delta SH(R)$ выполняется условие $u(0) = 0$. Нетрудно показать, что это ограничение не уменьшает общности всех утверждений.

Многократно будет использована теорема из работы [8] (сравни с [9]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $R_n = (1 + \theta)^{n/2}$, $A_n = \inf\{A(x) : x \geqslant R_n\}$ и $N_n = 9^{-1}A_n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда согласно теореме из [8] в круге $D(R_{n+2})$ неравенство

$$u(z) > -9N_n T(R_{n+2}, u) \tag{4}$$

выполняется вне множества $C_n = \bigcup\limits_k c(z_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)})$, $\sum\limits_k \alpha_k^{(n)} < N_n^{-1} R_{n+2}$. Заметим, что если

$$c(z_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)}) \cap \{z : R_n \leqslant |z| < R_{n+1}\} \neq \varnothing, \tag{5}$$

$k \in \mathbf{N}$, то при $n > n_0$ и $N_{n_0} > 8$ выполняется $|z_k^{(n)}| \geqslant R_{n-1}$, так как в противном случае из того, что $|z_k^{(n)}| < R_{n-1}$, следовало бы $R_n \leqslant |z_k^{(n)}| + \alpha_k^{(n)} < R_{n-1} + N_n^{-1} R_{n+2} < R_n$.

Выделим из каждого множества C_n, $n > n_0$, множество тех кружков $c(z_k^{(n)}, \alpha_k^{(n)})$, для которых выполняется (5), и обозначим его через C_n'. Пусть $C = \left\{\bigcup\limits_n C_n'\right\} \bigcup D(R_{n_0})$, тогда если α_j — радиусы, а z_j — центры кружков из C, то $(R_n \leqslant r < R_{n+1},\ n \geqslant n_0)$

$$\frac{1}{r}\sum_{|z_j|<r}\alpha_j \leqslant R_n^{-1}\Bigl(R_{n_0}+\sum_{j=n_0}^{n+1}\sum_{|z_k^{(j)}|\geqslant R_{j-1}}\alpha_k^{(j)}\Bigr) < R_{n_0}R_n^{-1}+$$

$$+R_n^{-1}\sum_{j=n_0}^{n+1}N_j^{-1}R_{j+2} < R_{n_0}R_n^{-1}+2\sum_{j=n_0}^{n+1}N_j^{-1}(1+\theta)^{(j-n)/2}. \tag{6}$$

Применяя ко второму слагаемому в правой части (6) следствие из теоремы Теплица (см. [10, п. 391, с. 326]), получим, что оно стремится к 0 при $n \to \infty$, а следовательно, C является C^0-множеством. Таким образом, из (4) получаем, что при $|z| \geqslant R_n$ и $z \overline{\in} C$ выполняется неравенство $u(z) > -A_nT((1+\theta)R_n, u) > -A(|z|)\,T((1+\theta)|z|, u)$.

Доказательство следствия 1. Положим $N_n = 2^{-\rho}9^{-1}(\Delta+\varepsilon)^{-1}A_n$, где ε — некоторое положительное число. Тогда из (4), учитывая (2) и свойство $V(kr) \sim k^{\rho}V(r)$, $r \to \infty$ [2, с. 49], получим, что при $r_\varepsilon < R_n \leqslant r = |z| < R_{n+1}$ и $z \overline{\in} C$ $u(z) > -9N_n(\Delta+\varepsilon)V(R_{n+2}) > -9N_n(\Delta+\varepsilon)2^{\rho}V(R_n) = -A_nV(R_n)$, откуда при $z \overline{\in} C$ и $r > r_\varepsilon$ следует соотношение (3).

Второе утверждение следствия 1 доказывается путем анализа примеров из работ [11, лемма 2] в случае $\rho = 1$ и [12, с. 456—457] для любого ρ, $0 < \rho < \infty$. Те же примеры показывают, что теорема 1 в случае функций u порядка ρ, $0 < \rho < \infty$, может быть дополнена утверждением, что в неравенстве (1) функция $A(r) \in \Omega(\infty)$ не может быть заменена на сколь угодно большую постоянную A, $0 < A < \infty$, с сохранением всех условий теоремы 1.

Покажем, что в теореме 1 нельзя брать за $A(r)$ постоянную и в случае, когда u имеет порядок $\rho = 0$. Укажем целую функцию f, такую, что $T(r, f) = 0(\ln^3 r)$ и для любых постоянных $A > 0$ и $K \geqslant 2$ множество $\{z : \ln|f(z)| < -AT(K|z|, f)\}$ не является C^0-множеством.

Возьмем последовательность (n_j) натуральных чисел настолько быстро возрастающую, что $n_k \geqslant k\sum_{j=1}^{k-1}n_j^2$, $n_1 = 1$, и положим $r_j = e^{n_j}$. Искомой функцией будет $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_j}\right)^{n_j^2}$. Для этой функции можно показать, что $T(r, f) \leqslant \frac{1}{3}(1+o(1))\ln^3 r$, $r \to \infty$, $T(2Kr_k, f) \leqslant (1+o(1)) \times \ln(2eK)\ln^2 r_k$, $k \to \infty$, а при $z \in \bigcup_{k=1}^{\infty} c(r_k, \eta r_k)$, где η, $0 < \eta < 1$, столь мало, что $|\ln\eta| > 2A\ln(2eK)$, выполняется неравенство $\ln|f(z)| \leqslant -(1+o(1))\,2A\ln(2eK)\ln^2 r_k$, $k \to \infty$. Отсюда и следует наше утверждение.

Замечание 2. Ничего не меняя в доказательстве, соотношение (3) в следствии 1 можно доказать и при $\rho = 0$. Однако при $\rho = 0$ не удается доказать последнее утверждение следствия 1.

Следствие 2. *Если для* $u(z) \in \delta SH(\infty)$ *конечного порядка* ρ *и уточненного порядка* $\rho(r)$ *неравенство*

$$u(z) \leqslant -A(|z|)\,V(|z|) \tag{7}$$

выполняется на некотором множестве положительной верхней линейной плотности, то $u(z) \equiv -\infty$.

Следствие 2 усиливает результат работы [13], в котором утверждается то же в предположении, что $u(z)$ — логарифм модуля целой функции и (7) выполняется на некоторой асимптотической кривой. Впрочем, результат из [13] следует также из теоремы Хеймана [6, теорема 5, с. 471].

При формулировке результатов для функций из $SH(1)$ нам понадобятся следующие определения.

Следуя работе [14], уточненным порядком назовем функцию $\rho(r)$ при $r \in [0, 1]$, если функция $\rho_1(x) = \rho(1 - x^{-1})$ — обычный уточненный порядок для $x \in [1, \infty[$.

Будем говорить (см. [15, с. 968—969]), что множество $C = \bigcup\limits_k c(z_k, \alpha_k)$, $\alpha_k + |z_k| < 1$, $k \in \mathbf{N}$, имеет нулевую линейную плотность, если $\Sigma^r \alpha_k = o(1-r)$, $r \to 1$, и нулевую γ-плотность, $\gamma > 1$, если $\Sigma^r \alpha_k^\gamma = o((1-r)^{\gamma-1})$, $r \to 1$. Здесь Σ^r означает суммирование по тем k, для которых $c(z_k, \alpha_k) \setminus D(r) \neq \varnothing$. Эти определения представляют некоторую модификацию определений работы [15].

Полученные ниже оценки улучшают результаты работы [16], но выполняются вне множества кружков большего, чем множество кружков с конечной суммой неэвклидовых длин радиусов.

Хорошо известно, что в случае функций $u(z) \in SH(1)$ порядки ρ_M и ρ_T функций $M(r, u)$ и $T(r, u)$, $r < 1$, могут не совпадать, но всегда выполняется $\rho_T + 1 \geqslant \rho_M \geqslant \rho_T$.

Теорема 2. *Пусть $u(z) \in SH(1)$. Тогда для любой функции $A(x) \in \Omega(1)$ и любого $\theta \in]0,1[$ можно указать множество нулевой γ-плотности, $\gamma > 1$, вне которого выполняется неравенство* $(|z| = r)$

$$u(z) > -A(r)\, M(r + \theta(1-r), u). \tag{8}$$

Доказательство. Введем обозначения: $t = 1 - \theta$; $s_n = [4(1-t)^{-1} t^{-n/2}]$ $R_n = 1 - t^{(n-1)/2}/2$; $r_n = (R_{n+1} + R_n)/2$; $\gamma_j^{(n)} = \{z : |z| = r_n, \ \arg z \in [2\pi(j-1)/s_n, 2\pi j/s_n]\}$, $j = \overline{1, s_n}$; $A_n = \inf\{A(x) : R_n \leqslant x < 1\}$; $N_n = 0{,}1\sqrt{A_n}$; $\mu(r_n) = \operatorname{mes}\{\varphi \in [0, 2\pi[: u(r_n e^{i\varphi}) \leqslant -\sqrt{A_n} M(r_n, u)\}$. Все дуги $\gamma_j^{(n)}$ разобьем на два множества. Если существует точка $a_j^{(n)} \in \gamma_j^{(n)}$, такая, что

$$u(a_j^{(n)}) > -\sqrt{A_n} M(r_n, u), \tag{9}$$

то дугу $\gamma_j^{(n)}$ отнесем к множеству $\Gamma_1^{(n)}$. Остальные дуги $\gamma_j^{(n)}$ отнесем к множеству $\Gamma_2^{(n)}$. Если $\gamma_j^{(n)} \in \Gamma_2^{(n)}$, то через $a_j^{(n)}$ обозначим произвольную точку $\gamma_j^{(n)}$. Тогда, если $c_j^{(n)} = c(a_j^{(n)}, \rho_n)$, где $\rho_n = R_{n+2} - r_n$, то $\{z : R_n \leqslant |z| < R_{n+1}\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{s_n} c_j^{(n)}$.

Оценим количество ν_n дуг $\gamma_j^{(n)}$, принадлежащих $\Gamma_j^{(n)}$. Из первой основной теоремы Неванлинны для субгармонических функций [3, с. 127] имеем

$$\frac{\mu(r_n)}{2\pi} \sqrt{A_n} M(r_n, u) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u^-(r_n e^{i\varphi})\, d\varphi \leqslant T(r_n, u) \leqslant M(r_n, u).$$

Отсюда получаем, что $\mu(r_n) < 2\pi A_n^{-1/2}$ и, следовательно,

$$\nu_n < s_n A_n^{-1/2}. \tag{10}$$

К кругам $c_j^{(n)}$ с центрами $a_j^{(n)} \in \bigcup\limits_j \{\gamma_j^{(n)} : \gamma_j^{(n)} \in \Gamma_j^{(n)}\}$ применяем теорему из [9]. Неравенство

$$u(z) - u(a_j^{(n)}) > -9 N_n M(r_n + \rho_n, u(z) - u(a_j^{(n)})) \tag{11}$$

выполняется в круге $c_j^{(n)}$ вне множества кружков с суммой радиусов, меньшей $\rho_n N_n^{-1}$. Из (9) и (11), учитывая, что $R_{n+2} = R_n + (1 - R_n)\,\theta$, для достаточно больших n получаем

$$u(z) > -9N_n M(R_{n+2}, u) + (9N_n + 1)\, u(a_j^{(n)}) >$$

$$> -(9N_n + (9N_n + 1)\sqrt{A_n})\, M(R_{n+2}, u) > -A_n M(R_n + (1 - R_n)\,\theta, u). \quad (12)$$

Из множества кружков, вне которых в кругах $c_j^{(n)}$, $j = \overline{1, s_n}$, с центрами $a_j^{(n)} \in \bigcup\limits_j \{\gamma_j^{(n)} : \gamma_j^{(n)} \in \Gamma_1^{(n)}\}$ выполняется неравенство (12), и всех кружков $c_j^{(n)}$ с центрами $a_j^{(n)} \in \bigcup\limits_j \{\gamma_j^{(n)} : \gamma_j^{(n)} \in \Gamma_2^{(n)}\}$ образуем множество C_n. Тогда можем утверждать, что неравенство (12) выполняется в кольце $\{z : R_n \leqslant |z| < R_{n+1}\}$ вне множества C_n кружков с общей суммой радиусов, меньшей $\nu_n\rho_n + s_n\rho_n N_n^{-1}$. Поскольку (12) выполняется в каждом кольце, $n \in \mathbf{N}$, при $z \overline{\in} C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} c(z_k, \alpha_k)$, то вне $C \cup D(R_1)$ имеет место неравенство (8).

Покажем, что множество C имеет нулевую γ-плотность, $\gamma > 1$. Пусть $R_{n+1} < r \leqslant R_{n+2}$, тогда, учитывая неравенство (10), получаем

$$\Sigma^r \alpha_k^\gamma < \sum_{k=n}^{\infty} (\nu_k + s_k N_k^{-\gamma})\, \rho_k^\gamma < \sum_{k=n}^{\infty} (A_k^{-1/2} + 10^\gamma A_k^{-\gamma/2})\, s_k \rho_k^\gamma <$$

$$< (10^\gamma + 1)\, A_n^{-1/2} \rho_n^\gamma s_n \sum_{k=0}^{\infty} t^{k(\gamma-1)/2} \leqslant K (1 - R_{n+2})^{\gamma-1} A_n^{-1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K (1 - r)^{\gamma-1} A_n^{-1/2} = o((1 - r)^{\gamma-1}), \quad r \to 1,$$

где K — некоторая положительная постоянная, зависящая от γ и θ.

Для случая функции u конечного порядка из теоремы 2 можно получить следующее утверждение.

Следствие 3. *Если $u(z) \in SH(1)$ имеет порядок $\rho_M < \infty$ и $\rho_M(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho_M(r) \to \rho_M$ при $r \to 1$, такой, что $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\, M(r, u)(1 - r)^{\rho_M(r)} < \infty$, то для произвольной функции $A(x) \in \Omega(1)$ можно указать множество нулевой γ-плотности, $\gamma > 1$, вне которого асимптотически выполняется неравенство*

$$u(z) > -A(|z|)(1 - |z|)^{-\rho_M(|z|)}. \quad (13)$$

Существуют субгармонические функции порядка $\rho_M \geqslant 1$ такие, что для любой постоянной A, $0 < A < \infty$, оценка (13) с $A(|z|) \equiv A$ не выполняется, какое бы множество нулевой γ-плотности, $\gamma > 1$, мы ни исключали из $D(1)$.

Доказательство следствия 3 опускаем. Отметим лишь, что второе утверждение этого следствия получено несколько громоздким анализом примера в [17, с. 209].

Теорема 3. *Пусть $u(z) \in \delta SH(1)$ имеет характеристику $T(r, u)$. Тогда для любой функции $A(x) \in \Omega(1)$ и любого $\theta \in]0,1[$ существует множество кружков нулевой линейной плотности, вне которого*

$$u(z) > -A(r)\, T(r + \theta(1 - r), u)(1 - r)^{-1}, \quad r = |z|, \quad (14)$$

и множество нулевой γ-плотности, $\gamma > 1$, вне которого

$$u(z) > -A(r)\, T(r + \theta(1 - r), u)(1 - r)^{1/\gamma-1}. \quad (15)$$

Доказательство теоремы 3 с незначительными изменениями повторяет доказательство теоремы 1.

Если порядок ρ_T субгармонической функции u равен нулю, то пример функции $u(z) = 1 - 2A \operatorname{Re}\{(1+z)/(1-z)\}$ показывает, что если снять условие $A(r) \to \infty$ при $r \to 1$, то для случая нулевой линейной плотности теорема 3 перестает быть справедливой. Если $\rho_T > 0$, то аналогичного примера не знаем, однако пример $u(z) = -\operatorname{Re}\{(1+z)/(1-z)\}^{\rho+1}$ показывает, что в (14) нельзя заменить множитель $(1-r)^{-1}$ на $(1-r)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Действительно, если $A(r) = (1-r)^{-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, то можно показать, что $u(r) > -A(r)\,T(r + \theta(1-r), u)\,(1-r)^{-\alpha}$ не выполняется для всех $r \in]r_0, 1[$. Нам не известны примеры, показывающие точность утверждения теоремы 3, касающегося неравенства (15).

Замечание 3. Аналогичные теоремы можно получить и для функций субгармонических (δ-субгармонических) в R^m, $m > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушакова И. В. Асимптотические оценки разности субгармонических функций в плоскости.— Вест. Харьк. ун-та. Сер. механико-математическая, 1970, № 53, вып. 34, с. 70—81.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
3. Hayman W. K. Subharmonic functions. V. 1.— Acad. Press, London. 1976.— 284 p.
4. Paley R. E. C. A note on integral function.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1932, **28**, p. 262—265.
5. Петренко В. П. Рост мероморфных функций.— Харьков: Вища школа, 1978.— 136 с.
6. Hayman W. K. The minimum modulus of large integral functions.— Proc. London Math. Soc., 1952, **2**, p. 469—512.
7. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций.— ДАН СССР, 1976, **229**, № 6, с. 1289—1291.
8. Кудина Л. С. Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре.— Теория функций, функц. анализ и их приложения. Харьков, 1971, вып. 14, с. 58—67.
9. Говоров Н. В. Об оценке снизу функции субгармонической в круге.— Теория функций. функц. анализ и их приложения. Харьков, 1968, вып. 6, с. 130—150.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.— М.: Наука, 1969.— 800 с.
11. Леонтьев А. Ф. О сходимости последовательности полиномов Дирихле.— ДАН СССР, 1956, **108**, № 1, с. 23—26.
12. Гольдберг А. А. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV.— Мат. сб., 1965, **66**, № 3, с. 411—457.
13. Hwang J. S. A uniqueness theorem for functions of exponential type.— J. Math. Analysis and Appl., 1972, **37**, N 2, p. 452—456.
14. Гижа Б. О. Деякі нерівності для зростаючих опуклих відносно логарифма функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 4, с. 296—298.
15. Гирнык М. А. Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений. II.— Сиб. мат. журн., 1976, **17**, № 5, с. 967—985.
16. Ушакова И. В. Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге.— ДАН СССР, 1961, **137**, № 6, с. 1319—1322.
17. Linden C. N. The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle.— Quart. J. Math., 1956, **7**, p. 196—216.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
26.XII 1977 г.