УДК 518:517.948

В. И. Горбайчук

Об оценках точности приближенного решения задачи Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе

1. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа в следующей постановке [1]: найти в полосе $\mathfrak{A} = \{(x, y): -\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x),\ u'_y(x, 0) = g(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные вещественные аналитические функции вещественной переменной x, $-\infty < x < \infty$.

Относительно решения $u(x, y)$ предполагаем только, что оно существует, причем на границе $y = b$ полосы $\mathfrak{A}$ функция $u(x, b)$ ограничена и непрерывна. Относительно же функций $f(x)$ и $g(x)$ предполагаем дополнительно, что их можно аналитически продолжить в комплексную плоскость аргумента $z = x + iy$ так, чтобы продолженные функции $f(x + iy)$ и $g(x + iy)$ были непрерывными в замкнутой полосе $\mathfrak{A}$ и аналитическими при $0 \leqslant y < b$, $-\infty < x < \infty$ (при этих условиях задача (1)—(2) имеет единственное решение).

Задача (1)—(2), как было показано еще Ж. Адамаром, является неустойчивой относительно малых изменений начальных данных и, таким образом, принадлежит к классическим примерам некорректных задач математической физики. Однако в силу прикладной важности этой задачи в последнее время она стала объектом многочисленных исследований (см., например, работы [2—8] и библиографию в [7]).

Полученные ниже результаты являются обобщениями утверждений, доказанных в [1]. Это обобщение заключается в том, что погрешность задания начальных данных на $y = 0$ рассматриваем не равномерной по x, $-\infty < x < \infty$, а считаем ее некоторой функцией $\psi(x, \delta)$, зависящей от x, $-\infty < x < \infty$, и положительного параметра δ. В данной работе проанализированы некоторые возможные классы мажорант $\psi(x, \delta)$, обеспечивающие устойчивость решения задачи методом регуляризации А. Н. Тихонова [9, 10]. В частности, результаты статьи [1] получаются при $\psi(x, \delta) \equiv \delta$. Количественная оценка уклонения приближенного решения от точного получена в терминах модуля непрерывности второго порядка.

2. Будем пользоваться общим видом регуляризирующего оператора задачи (1)—(2), который построен в [1]. Именно, с помощью теории обобщенных функций и их преобразований Фурье в [1] показано, что приближенное решение $u_\alpha(x, y)$ задачи (1)—(2) представляется обычной функцией в виде свертки:

$$u_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(x - t, y) f(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_\alpha(x - t, y)\, g(t)\, dt, \tag{3}$$

где

$$R_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{\frac{y^2-x^2}{4\alpha^2}} \cos\frac{xy}{2\alpha^2}, \tag{4}$$

$$T_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}} \int_0^{\frac{y}{2\alpha}} e^{t^2} \cos\frac{tx}{\alpha}\, dt. \tag{5}$$

Функция $u_\alpha(x, y)$ и есть приближенное решение задачи (1)—(2) при условии, что данные Коши $f(x)$ и $g(x)$ известны точно.

Обозначим $\varphi(x) = u(x, b)$, $\varphi_\alpha(x) = u_\alpha(x, b)$, а через $\omega_2(h; t)$ обозначим модуль непрерывности второго порядка функции $h(x)$, заданной на $(-\infty, \infty)$, определяемый соотношением $\omega_2(h; t) = \sup_{|\tau| \leqslant t} | h(x+\tau) - 2h(x) + h(x-\tau)|$.

Теорема 1. *Если* $\omega_2(\varphi; t) \leqslant \omega(t)$, *где* $\omega(t)$, $t > 0$, — *функция типа модуля непрерывности второго порядка* *, *то*

$$|\varphi(x) - \varphi_\alpha(x)| \leqslant 3\omega(\alpha). \tag{6}$$

Следствие. *Для каждого* $y \in [0, b]$ *равномерно относительно* x *на* $(-\infty, \infty)$ *имеет место равенство* $\lim_{\alpha\to 0} u_\alpha(x, y) = u(x, y)$.

Доказательство теоремы 1. Свертку (3) можно записать в виде (см. [1, соотношение (11)])

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(t)\,\varphi(x-t)\,dt, \tag{7}$$

где

$$W_\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}. \tag{8}$$

Так как справедливо тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(t)\,dt = 1, \tag{9}$$

то из (9) и (7) получаем $\varphi(x) - \varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - \varphi(x-t)]\, W_\alpha(t)\,dt = -\int_0^{\infty} [\varphi(x+t) - 2\varphi(x) + \varphi(x-t)]\, W_\alpha(t)\,dt$. Используя условия теоремы и свойство функции $\omega(t)$:

$$\omega(\lambda t) \leqslant (\lambda+1)^2 \omega(t), \quad \lambda > 0, \tag{10}$$

получаем (при $\mu > 0$) оценку

$$|\varphi(x) - \varphi_\alpha(x)| \leqslant \int_0^{\infty} \omega(t)\, W_\alpha(t)\,dt \leqslant \omega\left(\frac{1}{\mu}\right) \int_0^{\infty} (\mu t + 1)^2 W_\alpha(t)\,dt = \omega\left(\frac{1}{\mu}\right)\left[\mu^2\alpha^2 + 2\mu\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\right].$$

Полагаем $\frac{1}{\mu} = \alpha$. Тогда $|\varphi(x) - \varphi_\alpha(x)| \leqslant 3\omega(\alpha)$. Теорема доказана

* О модулях непрерывности второго порядка данной функции и о функциях типа модуля непрерывности см., например, [11].

3. Имея в виду, что в прикладных задачах данные Коши $f(x)$ и $g(x)$ известны приближенно (начальные данные, как правило, находятся измерениями), естественно предположить, что вместо этих данных нам заданы их приближения $f_\delta(x)$ и $g_\delta(x)$, относительно которых известно, что они непрерывны, ограничены и удовлетворяют условиям

$$|f(x)-f_\delta(x)|\leqslant\psi(x,\delta),\ |g(x)-g_\delta(x)|\leqslant\psi(x,\delta), \tag{11}$$

где $\psi(x,\delta)$ — четная по x, неотрицательная, суммируемая функция, определенная для $\forall\delta>0$. Из (11) и условий на данные Коши и их приближения следует, что функцию $\psi(x,\delta)$ можно считать конечной.

Применим операцию свертывания (3) к функциям $f_\delta(x)$ и $g_\delta(x)$. Тогда вместо $u_\alpha(x, y)$ получим ее приближение

$$u_{\alpha\delta}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_\alpha(x-t,y)f_\delta(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}T_\alpha(x-t,y)\,g_\delta(t)\,dt. \tag{12}$$

Полагаем $\varphi_{\alpha\delta}(x)=u_{\alpha\delta}(x,b)$. Функция $\varphi_{\alpha\delta}(x)$ и есть приближенное решение задачи, которое может быть фактически найдено по формуле (12). Найдем в равномерной метрике уклонение $\varphi_{\alpha\delta}(x)$ от точного решения $\varphi(x)$, пользуясь, как и в [1], методом Лаврентьева — Йона:

$$|\varphi(x)-\varphi_{\alpha\delta}(x)|\leqslant|\varphi(x)-\varphi_\alpha(x)|+|\varphi_\alpha(x)-\varphi_{\alpha\delta}(x)|\overset{df}{=}\varepsilon_1(\alpha)+\varepsilon_2(\alpha,\delta). \tag{13}$$

По теореме 1 $\varepsilon_1(\alpha)\leqslant 3\omega(\alpha)$. Найдем оценку величины $\varepsilon_2(\alpha,\delta)$. Имеем

$$\begin{gathered}|\varphi_\alpha(x)-\varphi_{\alpha\delta}(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R_\alpha(x-t,b)|\,|f(t)-f_\delta(t)|\,dt+\\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T_\alpha(x-t,b)|\,|g(t)-g_\delta(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R_\alpha(x-t,b)|\,\psi(t,\delta)\,dt+\\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T_\alpha(x-t,b)|\,\psi(t,\delta)\,dt\overset{df}{=}\frac{1}{2\pi}(I_1+I_2).\end{gathered} \tag{14}$$

Проведем оценку величин I_1 и I_2, используя (4), (5) и свойства функции $\psi(x,\delta)$:

$$\begin{gathered}I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R_\alpha(x-t,b)|\,\psi(t,\delta)\,dt=\int\limits_{0}^{\infty}(|R_\alpha(x-t,b)|+|R_\alpha(x+t,b)|)\,\psi(t,\delta)\,dt=\\ =\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}}\left(e^{\frac{xt}{2\alpha^2}}\left|\cos\frac{(x-t)\,b}{2\alpha^2}\right|+e^{-\frac{xt}{2\alpha^2}}\left|\cos\frac{(x+t)b}{2\alpha^2}\right|\right)\psi(t,\delta)dt\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}}\operatorname{ch}\frac{xt}{2\alpha^2}\,\psi(t,\delta)\,dt;\end{gathered} \tag{15}$$

$$I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{4\alpha^2}}\int\limits_0^{\frac{b}{2\alpha}}e^{t_1^2}\cos\frac{t_1(x-t)}{\alpha}\,dt_1\right|\psi(t,\delta)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{b}{2\alpha^2\pi} e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}} \operatorname{ch} \frac{xt}{2\alpha^2} \psi(t, \delta)\, dt. \tag{16}$$

Из (14) — (16) находим

$$\varepsilon_2(\alpha, \delta) \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}} \operatorname{ch} \frac{xt}{2\alpha^2} \psi(t, \delta)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{2\alpha^2\sqrt{\pi}} e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}} \operatorname{ch} \frac{xt}{2\alpha^2} \psi(t, \delta)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{b}{2\alpha} \right) \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{\frac{b^2-x^2}{4\alpha^2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\alpha^2}} \operatorname{ch} \frac{xt}{2\alpha^2} \psi(t, \delta)\, dt. \tag{17}$$

Остается по функции $\psi(x, \delta)$, характеризующей неточность исходной информации, найти такое допустимое значение параметра регуляризации α, чтобы при найденном $\alpha = \alpha(\psi(x, \delta))$ оператор (12) на $y = b$ был регуляризующим. Выбор допустимого значения параметра α существенно зависит от $\psi(x, \delta)$, и если $\alpha \to 0$ при $\psi(x, \delta) \to 0$, то будем считать согласованным выбор параметра регуляризации α со степенью точности задания исходных данных по соотношениям (11). Фактическое нахождение параметра регуляризации для конкретных задач весьма затруднительно, тем более, что функция $\psi(x, \delta)$ в достаточной степени произвольна. Будем специализировать задание функции $\psi(x, \delta)$ и для каждого специального случая доказывать возможность согласования выбора параметра α со степенью точности начальных данных, что и определяет в конечном счете устойчивое приближение к решению в каждом рассматриваемом случае.

А). $\psi(x, \delta) \equiv \delta$. В этом случае оценка (17) примет вид

$$\varepsilon_2(\alpha, \delta) \leqslant \frac{\delta}{2\pi} \left(1 + \frac{b}{2\alpha} \right) e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}}. \tag{17'}$$

Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$ — положительный корень уравнения $\frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{b}{2\alpha}\right) e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Этот корень, очевидно, удовлетворяет условию $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Используя теорему 1, оценки (13) и (17′), получаем, что равномерно во всей полосе $\mathfrak{A}$ имеет место утверждение

$$\lim_{\delta \to 0} u_{\alpha\delta}(x, y) = u(x, y), \tag{18}$$

совпадающее с теоремой 2 работы [1].

Б). $\psi(x, \delta) = \delta^r \frac{\omega(|x| + \alpha)}{(|x| + 2\alpha)^2}$, где $\alpha > 0$, $r > 0$, $\delta > 0$, а $\omega(t)$, $t > 0$, функция типа модуля непрерывности второго порядка. В этом случае, используя свойство (10) модуля непрерывности второго порядка и элементарные преобразования, оценку (17) запишем в виде

$$\varepsilon_2(\alpha, \delta) \leqslant \frac{\delta^r}{2\pi} \left(1 + \frac{b}{2\alpha} \right) e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}} \frac{\omega(\alpha)}{\alpha^2}. \tag{17''}$$

Таким образом,

$$|\varphi(x) - \varphi_{\alpha\delta}(x)| \leqslant 3\omega(\alpha) + \frac{\delta^r}{2\pi} e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}} \left(1 + \frac{b}{2\alpha} \right) \frac{\omega(\alpha)}{\alpha^2}. \tag{19}$$

Обозначим $E(\alpha)=\frac{1}{2\pi\alpha^2}\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}}$, через $\alpha=\alpha(\delta)$, $\delta>0$, обозначим корень уравнения

$$E(\alpha)=\delta^{-s},\quad 0<s\leqslant r. \tag{20}$$

В силу монотонности функции $E(\alpha)$ уравнение (20) имеет единственный положительный корень $\alpha(\delta)$, обладающий свойством $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta)=0$. Это позволяет считать согласованным выбор параметра регуляризации α со степенью точности исходных данных по состношениям (11) в случае рассматриваемого вида функции $\psi(x,\delta)$. Тогда оценка (19) уклонения приближенного решения от точного при $0<\delta<1$ примет вид $|\varphi(x)-\varphi_{\alpha\delta}(x)|\leqslant$ $\leqslant 3\omega(\alpha)+\delta^{r-s}\omega(\alpha)\leqslant 4\omega(\alpha)$.

Резюмируя изложенное в этом пункте, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть задача Коши* (1) — (2) *имеет непрерывное решение в замкнутой полосе* $\mathfrak{A}$, *а* $f_\delta(x)$ *и* $g_\delta(x)$ — *непрерывные приближения соответственно к функциям* $f(x)$ *и* $g(x)$, *удовлетворяющие при* $r>0$, $0<\delta<1$ *соотношениям* (11) *при* $\psi(x,\delta)=\delta^r\frac{\omega(|x|+\alpha)}{(|x|+2\alpha)^2}$, $\alpha>0$, *где,* $\omega(t)$, $t>0$, — *функция типа модуля непрерывности второго порядка. Если* $\alpha=\alpha(\delta)$ — *корень уравнения* $e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}}\frac{1}{2\pi\alpha^2}\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)=\delta^{-s}$, $0<s\leqslant r$, *то функция* $u_{\alpha\delta}(x,y)$, *определенная формулой* (12), *дает приближенное решение задачи* (1) — (2) *в полосе* $\mathfrak{A}$ *с такой равномерной* (*по* x) *оценкой погрешности:*

$$|u(x,y)-u_{\alpha\delta}(x,y)|\leqslant 4\omega(\alpha). \tag{21}$$

Следствие. *Условия* (11) *с функцией* $\psi(x,\delta)=\delta^r\frac{\omega(|x|+\alpha)}{(|x|+2\alpha)^2}$, $r>0$, $\alpha>0$, *являются достаточным условием существования приближенного решения задачи* (1) — (2) *с равномерной оценкой погрешности* (21); *при этом в произвольной точке* $(x,y)\in\mathfrak{A}$

$$\lim_{\delta\to 0}u_{\alpha\delta}(x,y)=u(x,y). \tag{22}$$

В). $\psi(x,\delta)=\delta^r\omega(|x|+1)$, где $r>0$, $\omega(t)$, $t>0$, — функция типа модуля непрерывности второго порядка. В этом случае, используя свойство (10) и производя некоторые вычисления (см. [12, с. 371, 379]), для $\varepsilon_2(\alpha,\delta)$ получим оценку $\varepsilon_2(\alpha,\delta)\leqslant\frac{\delta^r}{2\pi}e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}}\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)\left[\omega(\alpha)\left(\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)^2+\right.\right.$ $\left.\left.+3\right)+1\right]$, зависящую существенным образом от x, а согласование параметра регуляризации α со степенью точности исходных данных приводит к уравнению, положительное решение которого зависит от x, т. е. $\alpha=\alpha(x,\delta)$. Поэтому соотношение $\alpha(x,\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ не может быть гарантировано для всех $x\in(-\infty,\infty)$. Конечно, и в этом случае имеет место оценка (21) и предел (22) будет равномерным, но только в произвольном ограниченном подмножестве полосы $\mathfrak{A}$.

Г). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — 2π-периодические аналитические функции вещественной переменной x. Зададим неточность исходной информации об этих функциях с помощью неравенств

$$|f(x)-T_n(x)|\leqslant Kq^n,\quad |g(x)-\overline{T}_n(x)|\leqslant Kq^n, \tag{23}$$

где $0<q<1$, $K>0$ — постоянные, не зависящие от x, которые, очевидно, можно считать одинаковыми в обоих неравенствах, $T_n(x)$, $\overline{T}_n(x)$ — тригонометрические полиномы степени $\leqslant n$. Соотношения (23) возможны в силу известной теоремы С. Н. Бернштейна о порядке убывания наилучшего приближения аналитических периодических функций тригонометрическими полиномами (см., например, [13, с. 223]). Таким образом, полагаем $\psi(x, \delta) \equiv \psi_1(x, n) = Kq^n$. В этом случае имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть задача Коши (1) — (2) с аналитическими 2π-периодическими функциями $f(x)$ и $g(x)$ имеет непрерывное решение в замкнутой полосе $\mathfrak{A}$, а $T_n(x)$ и $\overline{T}_n(x)$ — тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n$, удовлетворяющие условию (23). Обозначим через $\alpha = \alpha(n)$ единственное положительное решение уравнения $\frac{K}{2\pi}\left(1+\frac{b}{2\alpha}\right)e^{\frac{b^2}{4\alpha^2}} = n^s$, $s>0$ — произвольное. Тогда функция $u_{\alpha\delta}(x, y)$, определенная формулой (12), дает приближенное решение задачи (1) — (2) в полосе $\mathfrak{A}$ с оценкой погрешности*

$$|u(x, y) - u_{\alpha\delta}(x, y)| \leqslant 3\omega(\alpha) + n^s q^n. \tag{24}$$

Следствие. *Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (3\omega(\alpha) + n^s q^n) = 0$, а поэтому в произвольной точке $(x, y) \in \mathfrak{A}$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\alpha\delta}(x, y) = u(x, y)$.*

Замечание. Теорема, аналогичная теореме 3, имеет место, если известны приближения функций $f(x)$ и $g(x)$ целыми функциями конечной степени. Возможность такого приближения следует (см. [14, с. 371—395]) из связи задачи приближения функций посредством целых функций конечной степени и задачи приближения периодических функций посредством конечных тригонометрических сумм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе.— Дифференц. уравнения, 1965, **1**, N 1, с. 131—136.
2. Pucci C. Sui problemi di Cauchy non «bene posti».— Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur., 1955, **18**, N 5, p. 473—477.
3. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. — ДАН СССР, 1955, **102**, № 2, с. 205—206.
4. Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа.— Успехи мат. наук, 1956, **11**, вып. 5, с. 3—76.
5. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики.— Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.— 92 с.
6. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах. — Мат. сборник, 1963, **61**, № 2, с. 211—223.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.— 223 с.
8. Мазья В. Г., Хавин В. П. О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа (единственность, нормальность, аппроксимация).— Труды Моск. мат. об-ва, 1974, **30**, с. 61—114.
9. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— ДАН СССР, 1963, **151**, № 3, с. 501—504.
10. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, 1963, **153**, № 1, с. 49—52.
11. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.— 1100 с.
13. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.— М.—Л., Гостехиздат, 1949.— 688 с.
14. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени.— Собрание сочинений. Т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.— 627 с.

Тернопольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
29.I 1979 г.