УДК 517.94

В. К. Григоренко

Об одной неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой

1. В работах [1—7] рассматривалась однородная система линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой $z = \infty$

$$\frac{dw}{dz} = z^r A(z) w, \tag{1}$$

где r — целое неотрицательное число, $r \geqslant 2$ и матрица $A(z)$ — квадратная матрица n-го порядка, которая имеет формальное разложение

$$A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} A_s. \tag{2}$$

Рассмотрим разложение частных решений для одной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений целого ранга с иррегулярной особой точкой вида

$$\frac{dw}{dz} = z^r A(z) w + f(z) e^{ikz^{r+1}}, \tag{3}$$

где матрица $A(z)$ имеет представление (2), а n-мерный вектор $f(z)$ представляется формальным рядом

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{-s}, \tag{4}$$

k — действительное число, $i = \sqrt{-1}$.

Построим решения для системы (3) при разных предположениях относительно корней характеристического уравнения

$$\det[A_0 - \lambda E] = 0 \tag{5}$$

и соответствующих им элементарных делителей.

2. Рассмотрим случай простых корней. Считаем, что A_0 имеет диагональный вид. С помощью подстановки $\mu = \frac{1}{\sqrt[n]{z}}$ сводим систему (3) к системе

$$\frac{1}{n} \mu^{n(r+1)+1} \frac{dw}{d\mu} = -A(\mu^{-n}) w + f(\mu^{-n}) e^{ik\mu^{-n(r+1)}}, \tag{6}$$

где матрица $A(\mu^{-n})$ и вектор $f(\mu^{-n})$ имеют такие представления:

$$A(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} A_s, \quad f(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} f_s. \tag{7}$$

Рассмотрим два случая:

а) «нерезонансный» — число $ik(r+1)$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения (5);

б) «резонансный» — число $ik(r+1)$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения (5).

Теорема 1. *В «нерезонансном» случае система дифференциальных уравнений* (6) *имеет частное формальное решение вида*

$$w(\mu) = V(\mu^{-n})\, e^{ik\mu^{-n(r+1)}}, \tag{8}$$

где $V(\mu^{-n})$ — *n-мерный вектор, который представляется формальным степенным рядом*

$$V(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} V_s. \tag{9}$$

Доказательство. Подставив вектор (8) в систему (6), получим

$$[A(\mu^{-n}) - ik(r+1)E]\, V(\mu^{-n}) = -\frac{1}{n}\mu^{n(r+1)+1} V'(\mu^{-n}) + f(\mu^{-n}). \tag{10}$$

Сравнивая в этом тождестве коэффициенты при μ^{ns} $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, имеем бесконечную алгебраическую систему уравнений

$$[A_0 - ik(r+1)E]\, V_s = h_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где

$$h_s = f_s - \sum_{i=1}^{s} A_i V_{s-i} - s - n(r+1)\, V_{s-n(r+1)}\,. \tag{12}$$

В «нерезонансном» случае $ik(r+1)$ не равно ни одному корню характеристического уравнения (5). Значит,

$$\det[A_0 - ik(r+1)E] \neq 0. \tag{13}$$

Поэтому из (11) находим

$$V_s = [A_0 - ik(r+1)E]^{-1} h_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Теорема 1 доказана.

В «резонансном» случае решение строится по-другому.

Теорема 2. *В «резонансном» случае система дифференциальных уравнений* (6) *имеет частное формальное решение*

$$w(\mu) = U(\mu^{-n})\, h(\mu)\, e^{ik\mu^{-n(r+1)}}, \tag{15}$$

где матрица $U(\mu^{-n})$ — *матрица типа* $(n \times n)$, *которая представляется формальным рядом*

$$U(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} U_s, \tag{16}$$

а $h(\mu)$ — *n-мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений*

$$\frac{dh(\mu)}{d\mu} = \{[-\Lambda(\mu^{-n}) + ik(r+1)E]\, h(\mu) + y(\mu^{-n})\}\, n\mu^{-[n(r+1)+1]}, \tag{17}$$

где $\Lambda(\mu^{-n})$ — *диагональная матрица порядка* n, *которая представляется рядом*

$$\Lambda(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} \Lambda_s, \tag{18}$$

а $y(\mu^{-n})$ — *n-мерный вектор, имеющий формальное представление*

$$y(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} y_s. \tag{19}$$

Доказательство. Подставляя вектор (15) с учетом (17) в систему (6), получаем тождество

$$\frac{1}{n}\mu^{n(r+1)+1}U'(\mu^{-n})h(\mu) + U(\mu^{-n})\{[-\Lambda(\mu^{-n}) + ik(r+1)E]h(\mu) +$$

$$+ y(\mu^{-n})\} - U(\mu^{-n})h(\mu)ik(r+1) = -A(\mu^{-n})U(\mu^{-n})h(\mu) + f(\mu^{-n}). \tag{20}$$

Приравнивая в этом тождестве члены при $h(\mu)$ и свободные члены, имеем соотношения

$$A(\mu^{-n})U(\mu^{-n}) - U(\mu^{-n})\Lambda(\mu^{-n}) = -\frac{1}{n}\mu^{n(r+1)+1}U'(\mu^{-n}) \tag{21}$$

и

$$U(\mu^{-n})y(\mu^{-n}) = f(\mu^{-n}). \tag{22}$$

Приравнивая в (21) коэффициенты при μ^{ns}, $s = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$A_0U_s - U_s\Lambda_0 = \Lambda_s - H_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где

$$H_s = -\left[\sum_{l=1}^{s-1} U_l\Lambda_{s-l} - \sum_{i=1}^{\left[\frac{s}{n}\right]} A_iU_{s-in} - \frac{s-n(r+1)}{n}U_{s-n(r+1)}\right], \tag{24}$$

$\left[\frac{s}{n}\right]$ — целая часть числа $\frac{s}{n}$. При $s = 0$ получаем

$$U_0 = E, \quad \Lambda_0 = A_0. \tag{25}$$

Легко увидеть, что при $s = \overline{1, n-1}$

$$U_s = E, \quad \Lambda_s = 0. \tag{26}$$

При $s = n$ получаем уравнение

$$A_0U_n - U_nA_0 = \Lambda_n - A_1. \tag{27}$$

Отсюда

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & & & 0 \\ & a_{22}^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где $a_{ii}^{(1)}$ $(i = \overline{1, n})$ — диагональные элементы матрицы A_1. Представив уравнение (27) в виде

$$A_0U_n - U_nA_0 = K_1, \tag{29}$$

где K_1 — матрица, на главной диагонали которой стоят нули, а на других местах, соответственные элементы матрицы A_1 с противоположными знаками, получаем

$$u_{nij} = \frac{k_{1ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j, \tag{30}$$

u_{nij}, k_{1ij} — $(i \times j)$ — элементы матриц U_n и K_1 соответственно. Диагональные же элементы матрицы U_n — произвольные. Выбираем их равными нулю. Матрица U_n полностью определена.

Аналогично можно доказать разрешимость матричных уравнений (23) при любых s. Приравнивая коэффициенты при μ^{ns} $s = 0, 1, 2, \ldots,$ в соответствии (22), получаем

$$U_0 y_s = \varphi_s, \tag{31}$$

где

$$\varphi_s = f_s - \sum_{i=1}^{s} U_i y_{s-i}. \tag{32}$$

Так как $U_0 = E$, а, значит,

$$\det U_0 \neq 0, \tag{33}$$

то из (31) находим

$$y_s = \varphi_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Теорема 2 доказана.

3. Пусть характеристическое уравнение (5) имеет один корень λ_0 кратности n и ему отвечает элементарный делитель $(\lambda - \lambda_0)^n$. Рассмотрим сначала «нерезонансный» случай.

Теорема 3. *Если для системы дифференциальных уравнений* (6) *выполняются условия:*

1) *уравнение* (5) *имеет корень* λ_0, *кратность которого* n, *и ему отвечает лишь один элементарный делитель этой же кратности;*

2) n-*я компонента вектора*

$$a = -A_1 U_0 \tag{35}$$

не равна нулю:

$$\{a\}_n \neq 0, \tag{36}$$

то система (6) *в «нерезонансном» случае имеет общее формальное решение вида*

$$w(\mu) = [u(\mu) h(\mu) + p(\mu^{-n})] e^{ik\mu^{-n(r+1)}}, \tag{37}$$

где $u(\mu)$, $p(\mu^{-n})$ — n-*мерные векторы, а* $h(\mu)$ — *скалярная функция, которая определяется дифференциальным уравнением*

$$\frac{dh(\mu)}{d\mu} = \{[-\lambda(\mu) + ik(r+1)] h(\mu) n \mu^{-n(r+1)+1}, \tag{38}$$

причем $u(\mu)$, $p(\mu^{-n})$, $\lambda(\mu)$ *имеют формальные разложения*

$$u(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s, \quad \lambda(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda_s, \quad p(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} p_s. \tag{39}$$

Доказательство. Для доказательства нужно так определить коэффициенты формальных рядов (39), чтобы вектор $w(\mu)$, который определяется соотношениями (37), (38), был решением системы (6). Для этого подставим вектор $w(\mu)$ в систему (6) и в этом тождестве приравняем коэффициенты при $h(\mu)$ и свободные члены. Получим

$$[A(\mu^{-n}) - \lambda(\mu) E] u(\mu) = -\frac{1}{n} \mu^{n(r+1)+1} u'(\mu), \tag{40}$$

$$[A(\mu^{-n}) - ik(r+1) E] p(\mu^{-n}) = -\frac{1}{n} \mu^{n(r+1)+1} p'(\mu^{-n}) + f(\mu^{-n}). \tag{41}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ^{ns} в соотношении (40), имеем

$$[A_0 - \lambda_0 E] u_s = \sum_{j=0}^{s-1} u_j \lambda_{s-j} + \varphi_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{42}$$

где

$$\varphi_s = -\sum_{l=1}^{\left[\frac{s}{n}\right]} A_l u_{s-ln} - \frac{s-n(r+1)}{n} u_{s-n(r+1)}. \tag{43}$$

Разрешимость (42) доказана в [9].

Сравнивая в соотношении (41) коэффициенты при одинаковых степенях μ^{ns}, имеем бесконечную систему уравнений

$$[A_0 - ik(r+1)E] p_s = \varphi_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

где

$$\varphi_s = f_s - \sum_{i=1}^{s} A_i p_{s-i} - [s - n(r+1)] p_{s-n(r+1)}. \tag{45}$$

Так как в «нерезонансном» случае

$$\det [A_0 - ik(r+1)E] \neq 0, \tag{46}$$

то из (44) находим

$$p_s = [A_0 - ik(r+1)E]^{-1} \varphi_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{47}$$

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим «резонансный» случай.

Теорема 4. *Если для системы дифференциальных уравнений* (6) *выполняются условия:*

1) *характеристическое уравнение* (5) *имеет один n-кратный корень λ_0, которому отвечает лишь один элементарный делитель $(\lambda - \lambda_0)^n$;*

2) *n-я компонента вектора*

$$a = -A_1 u_0 \tag{48}$$

не равна нулю:

$$\{a\}_n \neq 0; \tag{49}$$

3)
$$f(\mu^{-n}) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{ns} f_s, \tag{50}$$

то система (6) *в «резонансном» случае имеет формальное частное решение вида*

$$w(\mu) = [u(\mu) h(\mu) + p(\mu^{-n})] e^{ik\mu^{-n(r+1)}}, \tag{51}$$

где $u(\mu)$, $p(\mu^{-n})$ — n-мерные векторы, а $h(\mu)$ — скалярная функция, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dh(\mu)}{d\mu} = \{[-\lambda(\mu) + ik(r+1)] h(\mu) + y(\mu)\} n\mu^{-n(r+1)+1}, \tag{52}$$

причем $u(\mu)$, $\rho(\mu^{-n})$, $\lambda(\mu)$, $y(\mu)$ имеют формальные разложения

$$u(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s, \quad \lambda(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda_s, \quad p(\mu^{-n}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ns} p_s, \quad y(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} y_s \mu^s. \tag{53}$$

Доказательство. Для доказательства нужно определить коэффициенты рядов (53). Подставив вектор (51) с учетом (52) в систему (6) и приравняв в этом тождестве коэффициенты при $h(\mu)$ и свободные члены, получим соотношение (40) и

$$[A(\mu^{-n}) - ik(r+1)E]\, p(\mu^{-n}) = -\frac{1}{n}\mu^{n(r+1)+1} p'(\mu^{-n}) + f(\mu^{-n}) - u(\mu)\, y(\mu). \tag{54}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ^s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) в (40) и (54), получаем соотношение (42) и

$$[A_0 - ik(r+1)E]\, p_s = \sum_{j=0}^{s} u_j y_{s-j} + \varphi_s, \quad s \geqslant 0, \tag{55}$$

где

$$\varphi_s \equiv 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1, \quad \varphi_s = f_{\left[\frac{s}{n}\right]} - \frac{s - n(r+1)}{n} p_{s-n(r+1)} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{s}{n}\right]} A_j p_{s-nj}, \quad s \geqslant n, \tag{56}$$

$\left[\frac{s}{n}\right]$ — целая часть числа $\frac{s}{n}$.

В этом же случае

$$A_0 - ik(r+1)E = I, \tag{57}$$

где I — $(n \times n)$ - матрица вида

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Поэтому (55) примет вид

$$I_{p_s} = \sum_{j=0}^{s} u_j y_{s-j} + \varphi_s, \quad s \geqslant 0. \tag{59}$$

Умножая слева обе части (59) на I^{n-1} и учитывая (42) для $s = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$\sum_{j_{n-1}=n-1}^{s} \sum_{j_{n-2}=n-2}^{j_{n-1}-1} \cdots \sum_{j_0=0}^{j_1-1} u_{j_0} \lambda_{j_1-j_0} \ldots \lambda_{j_{n-1}-j_{n-2}} y_{s-j_{n-1}} + \psi_s = 0, \quad s \geqslant 0, \tag{60}$$

где

$$\psi_s = I^{n-1}\varphi_s + I^{n-2}\sum_{j_0=n}^{s} \varphi_{j_0} y_{s-j_0} + I^{n-3} \sum_{j_1=n-1}^{s} \sum_{j_0=n}^{j_1-1} \varphi_{j_0} \lambda_{j_1-j_0} y_{s-j_1} + \cdots$$
$$\cdots + \sum_{j_{n-1}=2n-2}^{s} \sum_{j_{n-2}=2n-3}^{j_{n-1}-1} \cdots \sum_{j_0=n}^{j_1-1} \varphi_{j_0} \lambda_{j_1-j_0} \ldots \lambda_{j_{n-1}-j_{n-2}} y_{s-j_{n-1}},$$

$$\psi_s \equiv 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant n-1. \tag{61}$$

Положив в уравнении (60) $s = n-1$ (при $0 \leqslant s \leqslant n-2$ оно превращается в тождество), получим

$$\lambda_1^{n-1} y_0 u_{01} = 0. \tag{62}$$

Отсюда, учитывая условие 2), а также то, что $u_{01} \neq 0$, имеем

$$y_0 = 0. \tag{63}$$

Положив в уравнении (59) $s = n$ и учитывая при этом (63), получаем

$$\lambda_1^{n-1} y_1 + u_{01} + \psi_{n1} = 0, \tag{64}$$

из которого определяется y_1.

Этим же способом определяются и все последующие числа $y_2, y_3, \ldots$. Из (52) определяем векторы p_s ($s = 0, 1, 2, \ldots$). Теорема 4 доказана.

4. Рассмотрим построение формальных решений в случае, если характеристическое уравнение (5) имеет один n-кратный корень λ_0 и ему отвечают p кратных элементарных делителей $(\lambda - \lambda_0)^{s_1}, (\lambda - \lambda_0)^{s_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_0)^{s_p}$, где $\sum_{i=1}^{p} s_i = n$.

Решения системы (1) будут построены в двух случаях: А. $s_1 = s_2 = \ldots = s_p$; В. $s_1 > s_2 > \ldots > s_p$.

А. С помощью подстановки $\mu = z^{-\frac{1}{s_1}}$ сводим систему (3) к системе

$$\frac{1}{s_1} \mu^{s_1(r+1)+1} \frac{dw}{d\mu} = -A(\mu^{-s_1}) w + f(\mu^{-s_1}) e^{ik\mu^{-s_1(r+1)}}, \tag{65}$$

где матрица $A(\mu^{-s_1})$ и вектор $f(\mu^{-s_1})$ имеют формальные представления:

$$A(\mu^{-s_1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{s_1 s} A_s, \quad f(\mu^{-s_1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{s_1 s} f_s. \tag{66}$$

Считая, что матрица A_0 имеет каноническую жорданову форму в «резонансном» случае, получаем теорему.

Т е о р е м а 5. *Пусть для системы* (65) *выполняются условия:*

1) *корню* λ_0 *уравнения* (5) *соответствуют* ρ *кратных элементарных делителей;*

2) $s_1 = s_2 = \ldots = s_p$;

3) *уравнение*

$$\det \begin{bmatrix} \omega - \{A_1\}_{s_1,1} - \{A_1\}_{s_1,s_1+1} \cdots - \{A_1\}_{s_1,l_{p-1}+1} \\ -\{A_1\}_{2s_1,1} \omega - \{A_1\}_{2s_1,s_1+1} \cdots - \{A_1\}_{2s_1,l_{p-1}+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\{A_1\}_{n,1} - \{A_1\}_{n,s_1+1} \cdots \omega - \{A_1\}_{n,l_{p-1}+1} \end{bmatrix} = 0, \tag{67}$$

где $\{A_1\}_{i,j}$ — *соответствующие элементы матрицы* A_1, *а* $l_{p-1} = s_1 + s_2 + \ldots + s_p$, *имеет* p *простых ненулевых корней, тогда система* (65) *имеет общее формальное решение вида*

$$w(\mu) = \sum_{j=1}^{p} U_j(\mu) h_j(\mu) + V(\mu^{-s_1}) e^{ik\mu^{s_1(r+1)}}, \tag{68}$$

где $U_j(\mu)$ — *прямоугольная матрица размеров* $(n \times s_1)$, $V(\mu^{-s_1})$ — n-*мерный вектор*:

$$U_j(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_{js}, \quad V(\mu^{-s_1}) = \sum_{s=-1}^{\infty} \mu^{s_1 s} V_s, \tag{69}$$

а $h_j(\mu)$ — s_1-*мерные векторы, которые определяются системой дифференциальных уравнений*

$$\frac{dh_j(\mu)}{d\mu} = -s_1 \mu^{-[s_1(r+1)+1]} (W_j + \Lambda_j(\mu)) h_j(\mu), \tag{70}$$

где W_j — *клетка Жордана, соответствующая элементарному делителю* $(\lambda - \lambda_0)^{s_1}$, $\Lambda_j(\mu)$ — *диагональные матрицы* $(j = \overline{1, p})$, *имеющие представления*

$$\Lambda_j(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \Lambda_{js}, \quad j = \overline{1, p}. \tag{71}$$

В «нерезонансном» случае имеет место такая теорема.

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы* 5, *то в «нерезонансном» случае система дифференциальных уравнений* (65) *имеет общее формальное решение* (68), *где* $U_j(\mu)$ — *прямоугольные матрицы размеров* $(n \times s_1)$, $V(\mu^{-s_1})$ — *n-мерный вектор*:

$$U_j(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_{js}, \quad V(\mu^{-s_1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{s_1 s} V_s, \tag{72}$$

а $h_j(\mu)$ — s_1-*мерные векторы, которые определяются системой* (70).

В случае В имеют место следующие теоремы.

Теорема 7. *Если для системы* (3) *выполняются условия*:

1) *корню* λ_0 *уравнения* (5) *отвечают* $p \geqslant 2$ *элементарных делителей*, $\sum_{i=1}^{p} s_i = n$;

2) $s_1 > s_2 > \ldots > s_p$;

3) *уравнение*

$$\det D_j(\omega_j) = \det \begin{bmatrix} \{A_1\}_{s_1,1}\,\{A_1\}_{s_1,s_1+1} \ldots \{A_1\}_{s_1,l_{j-1}+1} \\ \{A_1\}_{s_1+s_2,1}\,\{A_1\}_{s_1+s_2,\, s_1+1} \ldots \{A_1\}_{s_1+s_2,l_{j-1}+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{A_1\}_{l_j,1}\,\{A_1\}_{l_j,s_1+1} \ldots \omega - \{A_1\}_{l_j,l_{j-1}+1} \end{bmatrix} = 0, \tag{73}$$

где $l_j = s_1 + s_2 + \ldots + s_j$, $j = \overline{1, p}$, *имеет отличный от нуля корень* $\omega_j = [\lambda_j^{(1)}]^{s_j}$, *и ранг матрицы* $D_j(\omega_j)$ *равен* $j - 1$, *тогда система* (3) *имеет в «резонансном» случае общее формальное решение*

$$w(z) = \sum_{j=1}^{p} U_j(\mu_j)\, h_j(\mu_j) + V(\mu_j^{-s_j})\, e^{ik\mu_j^{s_j(r+1)}}, \tag{74}$$

где $U_j(\mu_j)$ — *прямоугольные матрицы размеров* $(n \times s_j)$, $V(\mu_j^{-s_j})$ — *n-мерный вектор*, $j = \overline{1, p}$:

$$U_j(\mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} U_{js}\mu_j^s, \quad V(\mu_j^{-s_j}) = \sum_{s=-1}^{\infty} \mu_j^s V_s, \tag{75}$$

$h_j(\mu_j)$ — s_j-*мерные векторы, определяющиеся системой дифференциальных уравнений*

$$\frac{dh_j(\mu_j)}{d\mu_j} = -s_j \mu_j^{-[s_j(r+1)+1]} (W_j + \Lambda_j(\mu_j))\, h_j(\mu_j), \tag{76}$$

W_j — *клетка Жордана, отвечающая элементарному делителю* $(\lambda - \lambda_0)^{s_j}$, $\Lambda_j(\mu_j)$ — *диагональные матрицы*, $j = \overline{1, p}$, *которые представляются рядами*

$$\Lambda_j(\mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s \Lambda_{js}, \quad z = \mu^{-\frac{1}{s_j}}. \tag{77}$$

Примечание. В «нерезонансном» случае система (3) обладает решением (74), где $U_j(\mu_j)$ имеет вид (75), $h_j(\mu_j)$ — (76), $\Lambda_j(\mu_j)$ — (47), а n-мерный вектор $V(\mu_j^{-s_j})$ имеет формальное разложение

$$V(\mu_j^{-s_j}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s V_s. \tag{78}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 474 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.— 464 с.
3. Turritin H. L. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neigborhood of an irregular singular point.— Acta Math., 1955, **93**, N 1/2, c. 27—66.
4. Терещенко Н. И. О решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками.— Укр. мат. журн., 1958, **10**, № 2, с. 220—223.
5. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 1, с. 29—34.
6. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про загальний формальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 5, с. 441—446.
7. Шкіль М. І., Григоренко В. К. Про формальні розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.— Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1973, № 15, с. 26—39.
8. Фещенко С. Ф., Шкиль М. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.— 251 с.
9. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— Київ: Вища школа, 1971.— 226 с.

Уманский
педагогический институт

Поступила в редакцию
17.IV 1978 г.