УДК 517.9

А. П. Малицкая

Построение фундаментального решения для одного класса вырождающихся параболических уравнений высокого порядка

В данной статье построено фундаментальное решение для одного класса вырождающихся параболических уравнений диффузии с инерцией, определенных в [1, 2], при этом используется методика работы [3] и некоторые модифицированные методы [4].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} = \sum_{|k|=2b} A_k(t, R)\, D_x^k u(t, R), \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{|k|=2b} A_k(t, R)\, D_x^k$ — равномерно параболический в смысле И. Г. Петровского оператор в $\Pi = \{(t, R),\ R = (x, y) \in E_{2n},\ t \in [0, T]\}$:

1) коэффициенты оператора ограничены и удовлетворяют условию Гельдера по x с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$;

2) коэффициенты оператора непрерывны по t равномерно по R из Π;

3) коэффициенты оператора имеют первые непрерывные ограниченные производные по y.

Покажем, что при этих условиях существует классическое фундаментальное решение (1).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial y_j} = \sum_{|k|=2b} A_k(t, \xi, \eta - \xi(t-\tau))\, D_x^k u, \tag{2}$$

где $(\xi, \eta - \xi(t-\tau))$ — параметрическая точка. Обозначим фундаментальное решение (2) через $G(t, R, \tau, S, \xi, \eta - \xi(t-\tau))$, $S = (\xi, \eta)$.

Фундаментальное решение (1) ищем методом Леви:

$$Z(t, R, \tau, S) = G(t, R, \tau, S, \xi, \eta - \xi(t-\tau)) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_{2n}} G(t, R, \beta, M, \sigma, \theta - \sigma(t-\beta))\, \varphi(\beta, M, \tau, S)\, dM,\quad M = (\sigma, \theta), \tag{3}$$

где $\varphi(t, R, \tau, S)$ — подлежащая определению функция, которая удовлетворяет условию Гельдера по x с показателем α_1, $0 < \alpha_1 \leqslant 1$, и непрерывно дифференцируемая по y:

$$\varphi(t, R, \tau, S) = K(t, R, \tau, S) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_{2n}} K(t, R, \beta, M)\, \varphi(\beta, M, \tau, S)\, dM,$$

где

$$K(t,R,\tau,S)=\sum_{|k|=2b}\left[A_k(t,R)D_x^k-\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right]G(t,R,\tau,S,\xi,\eta-$$

$$-\xi(t-\tau))=\sum_{|k|=2b}[A_k(t,R)-A_k(t,\xi,\eta-\xi(t-\tau))]D_x^k\times$$

$$\times G(t,R,\tau,S,\xi,\eta-\xi(t-\tau));$$

$\varphi(t,R,\tau,S)$ ищем в виде

$$\varphi(t,R,\tau,S)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,R,\tau,S),\ K(t,R,\tau,S)=K_1(t,R,\tau,S),$$

$$K_m(t,R,\tau,S)=\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_{2n}}K_1(t,R,\beta,M)K_{m-1}(\beta,M,\tau,S)\,dM,\qquad m=2,3,\ldots. \tag{4}$$

Оценим $K(t,R,\tau,S)$, используя оценки для $D_x^kG(t,R,\tau,S)$ [1]:

$$|K(t,R,\tau,S)|\leqslant C\exp\{-C_1\rho_1(t,R,\tau,S)\}(t-\tau)^{-\frac{(2b+2)}{2b}n-1-\frac{\alpha}{2b}}, \tag{5}$$

где

$$\rho_1(t,R,\tau,S)=\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q+\left(\frac{\left|y-\eta+\frac{x+\xi}{2}(t-\tau)\right|}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b}}}\right)^q,\ q=\frac{2b}{2b-1}.$$

Обозначим

$$\rho^2(t,R,\tau,S)=\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}+\frac{3\left(y-\eta+\frac{x+\xi}{2}(t-\tau)\right)^2}{(t-\tau)^3},\quad r_1=\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q.$$

Оценим $K(t,R,\tau,S)$ при $\rho\leqslant r$, где r — произвольная фиксированная $\mathrm{const}>0$. При $\rho<r$

$$|K(t,R,\tau,S)|\leqslant (C(t-\tau)^{-\left(\frac{1}{2b}+\frac{3}{2}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}\times$$

$$\times\rho(t,R,\tau,S)^{-(n-\mu)}\exp\{-C_1r_1\}. \tag{6}$$

При $\rho\geqslant r$

$$|K(t,R,\tau,S)|\leqslant C\rho(t,R,\tau,S)^{-(n+\mu)}\exp\{-C_1r_1\}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\left(\frac{1}{2b}+\frac{3}{2}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}, \tag{7}$$

где $\mu\leqslant\alpha_2<\alpha$.

Используя оценки (6), (7), оценим члены ряда (4). Покажем оценки (6), (7) для $K_2(t,R,\tau,S)$. Предположим, что $\rho(t,R,\tau,S)<2r$, и построим эллипс

$$\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}+\frac{3\left(y-\eta+\frac{x+\xi}{2}(t-\tau)\right)^2}{(t-\tau)^3}=16r^2.$$

Можно подобрать значения постоянных в (6), (7) так, чтобы эти неравенства удовлетворялись, если $\rho(t, R, \tau, S) \leqslant 4r$:

$$|K_2(t, R, \tau, S)| \leqslant \int_\tau^t d\beta \int_V [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n} \times$$

$$\times [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)} [\rho(t, R, \beta, M)\rho(\beta, M, \tau, S)]^{-(n-\mu)} \times$$

$$\times \exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma) + r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\}\, dM +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{E_{2n}-V} [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times [\rho(t, R, \beta, M)\rho(\beta, M, \tau, S)]^{-(n+\mu)} \exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma) +$$

$$+ r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\}\, dM = I_1 + I_2,$$

где V — тело, ограниченное эллипсом $\rho(t, R, \tau, S) = 4r$.

Рассмотрим I_1. Разобьем его на четыре интеграла: $I_1 = \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t} \int_{V_1} + \int_\tau^{\frac{t-\tau}{2}} \int_{V_1} + \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t} \int_{V_2} + \int_\tau^{\frac{t-\tau}{2}} \int_{V_2} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$, где $V_1 \cup V_2 = V$, V_1 — множество, где $\rho(t, R, \beta, M) \leqslant \rho(t, R, \tau, S)$, V_2 — множество, где $\rho(t, R, \beta, M) > \rho(t, R, \tau, S)$.

Поскольку H_1 и H_3, H_2 и H_4 оцениваются аналогично, оценим H_1 и H_2:

$$H_1 \leqslant \frac{C}{2}\rho(t, R, \tau, S)^{-(n-\mu)}(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)} \times$$

$$\times \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n+1-\frac{\alpha}{2b}-\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}} \int_{V_1} \rho(t, R, \beta, M)^{-n+\mu} \times$$

$$\times \exp\left\{-C_1\left[\left(\frac{|x-\sigma|}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q + \left(\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right]\right\} dM. \tag{8}$$

В (8) сделаем замену переменных

$$\frac{x_j-\sigma_j}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b}}} = \sigma'_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\pm\sqrt{\frac{(x_j-\sigma_j)^2}{4(t-\beta)} + \frac{3\left(y_j-\eta_j+\frac{x_j+\sigma_j}{2}(t-\beta)\right)}{(t-\beta)^3}} = \rho_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

и используем

$$\exp\left\{-C_1\left[\left(\frac{|x-\sigma|}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q + \left(\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right]\right\} \leqslant \exp\left\{-C_1\left(\frac{(x-\xi)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\},$$

а V_1 заменим на V. При замене (9) V перейдет в шар радиуса $4r$ по θ', откуда

$$H_1 \leqslant C\exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}\rho(t,R,\tau,S)^{-(n-\mu)}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+2\left(\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)\right)}. \tag{10}$$

Перейдем к оценке H_2.

$$H_2 \leqslant C\exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}\rho(t,R,\tau,S)^{-(n-\mu)}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}\int\limits_{\tau}^{\frac{t-\tau}{2}}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{V_1}\frac{\exp\left\{-\varepsilon_1\left(\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}\rho(t,R,\beta,M)^{-(n-\mu)}\,dM}{(\beta-\tau)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n+1-\frac{\alpha}{2b}-\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}}\leqslant$$

$$\leqslant C\exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}\rho(t,R,\tau,S)^{-(n-\mu)}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{\frac{t-\tau}{2}}(\beta-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{V_1}\frac{\exp\left\{-\varepsilon_1\left[\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^q\right\}dM}{|\rho(\beta,M,\tau,S)-\rho(t,R,\tau,S)|^{n-\mu}}.$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{\sigma_j-\xi_j}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}=\sigma'_j,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\frac{(\sigma_j-\xi_j)^2}{4(\beta-\tau)}+\frac{3\left(\theta_j-\eta_j+\frac{\sigma_j+\xi_j}{2}(\beta-\tau)\right)^2}{(\beta-\tau)^3}=\theta'^2_j,$$

а V_1 заменим на тело, ограниченное эллипсом $\rho(\beta,M,\tau,S)=4r$. Поэтому

$$H_2\leqslant C\exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left[\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^q\right\}(t-\tau)^{-1-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n+\frac{\alpha}{b}+\mu\left(1-\frac{1}{b}\right)}\times$$

$$\times \rho(t,R,\tau,S)^{-(n-\mu)}\int\limits_{16r^2-\rho^2}^{16r^2+\rho^2}\rho'^{-1+\mu}d\rho' \leqslant C\rho(t,R,\tau,S)^{-n+\mu}\times$$

$$\times \exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left[\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^q\right\}(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{b}+\mu\left(1-\frac{1}{b}\right)}. \qquad (11)$$

Из оценок (10) и (11) следует

$$|I_1| \leqslant C_3 \exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}\rho(t,R,\tau,S)^{-n+\mu}\times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+2\left(\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)\right)}. \qquad (12)$$

Оценим I_2.

$$|I_2| \leqslant C_4\rho(t,R,\tau,S)^{-n-\mu}\left\{\int\limits_{\frac{t-\tau}{2}}^{t}d\beta\int\limits_{E_{2n}-V}\rho(t,R,\beta,M)^{-n-\mu}\times\right.$$

$$\times\frac{\exp\left\{-C\left[\left(\frac{|x-\sigma|}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q+\left(\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right]\right\}dM}{(t-\beta)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n+1-\frac{\alpha}{2b}-\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}}+\int\limits_{\tau}^{\frac{t-\tau}{2}}d\beta\times$$

$$\times\left.\int\limits_{E_{2n}-V}\rho(\beta,M,\tau,S)^{-n-\mu}\frac{\exp\left\{-C\left[\left(\frac{|x-\sigma|}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q+\left(\frac{|\sigma-\xi|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right]\right\}dM}{(\beta-\tau)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n+1-\frac{\alpha}{2b}-\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}}\right\}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}\leqslant C_5\rho(t,R,\tau,S)^{-n-2\mu}\times$$

$$\times\exp\left\{-(C_6-\varepsilon)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+2\left(\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right)}. \qquad (13)$$

Из оценок (8) — (11) при $\rho(t,R,\tau,S)<2r$ следует оценка

$$|K_2(t,R,\tau,S)| \leqslant C(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+2\left(\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(-\frac{1}{2b}+\frac{1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\rho(t,R,\tau,S)^{-n+2\mu}\exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}. \qquad (14)$$

Для оценки $K_2(t,R,\tau,S)$ при $\rho(t,R,\tau,S)\geqslant 2r$ рассмотрим множества V_R и V_S, ограниченные эллипсами

$$\frac{|x-\sigma|^2}{4(t-\beta)}+\frac{3\left|y-\theta+\frac{\sigma+x}{2}(t-\beta)\right|^2}{(t-\beta)^3}=r^2,$$

$$\frac{|\sigma-\xi|^2}{4(\beta-\tau)}+\frac{3\left|\theta-\eta+\frac{\sigma+\xi}{2}(\beta-\tau)\right|^2}{(\beta-\tau)^3}=r^2.$$

Через V_0 обозначим множество точек, содержащее в себе V_R и V_S, $V_0 \subset \subset V$. Тогда

$$|K_2(t, R, \tau, S)| \leqslant C \int_{\tau}^{t} [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}} d\beta \times$$

$$\times \left\{ \int_{E_{2n}-V_0} \frac{\exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma) + r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\} dM}{[\rho(t, R, \beta, M)\rho(\beta, M, \tau, S)]^{n+\mu}[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}} + \right.$$

$$+ \int_{V_R} \frac{(t-\beta)^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}(\beta-\tau)^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)} \exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma)+r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\} dM}{\rho(t, R, \beta, M)^{n-\mu}\rho(\beta, M, \tau, S)^{n+\mu}} +$$

$$+ \int_{V_S} \frac{\exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma) + r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\} \times (t-\beta)^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}(\beta-\tau)^{\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)} dM}{\rho(t, R, \beta, M)^{n+\mu}\rho(\beta, M, \tau, S)^{n-\mu}} +$$

$$\left. + \int_{V_0-V_R-V_S} \frac{\exp\{-C_1[r_1(t, x, \beta, \sigma) + r_1(\beta, \sigma, \tau, \xi)]\} \times [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)} dM}{[\rho(t, R, \beta, M)\rho(\beta, M, \tau, S)]^{n-\mu}} \right\}.$$

Отсюда получаем оценку для $K_2(t, R, \tau, S)$ при $\rho(t, R, \tau, S) \geqslant 2r$:

$$|K_2(t, R, \tau, S)| \leqslant C \exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left[\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^{q}\right\} \times$$

$$\times \rho(t, R, \tau, S)^{-n-2\mu}(t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{b}+\mu\left(\frac{1}{b}-1\right)}.$$

Аналогично устанавливаются оценки для $K_\nu(t, R, \tau, S)$. При $\rho(t, R, \tau, S) < < 2r$

$$|K_\nu(t, R, \tau, S)| \leqslant C_\nu(\varepsilon)\rho(t, R, \tau, S)^{-n+\nu\mu} \times$$

$$\times \exp\left\{-C_1(1-\varepsilon_1^\nu)\left[\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\nu\alpha}{2b}+\nu\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}.$$

При $\rho(t, R, \tau, S) \geqslant 2r$

$$|K_\nu(t, R, \tau, S)| \leqslant C_\nu(\varepsilon)\rho(t, R, \tau, S)^{-(n-\nu\mu)} \exp\left\{-C_1(1-\varepsilon_1^\nu)\left[\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right]^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\nu\alpha}{2b}+\nu\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Изучим сходимость ряда (4). Обозначим через g большее из чисел:

$$g = \sup\left\{\int_{V_R} \frac{\exp\{-\varepsilon_1 r_1(t, x, \beta, \sigma)\} dM}{\rho(t, R, \beta, M)^{n-\mu}(t-\beta)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n}},\right.$$

$$\int\limits_{E_{2n}-V_R} \frac{\exp\{-\varepsilon_1 r_1(t, x, \beta, \sigma)\}\, dM}{\rho(t, R, \beta, M)^{n+\mu}(t-\beta)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n}}\Bigg\}.$$

Предположим, затем, что ядро порядка $m + \nu_0$ удовлетворяет неравенству

$$|K_{\nu_0+m}(t, R, \tau, S)| \leqslant P_m(t-\tau)^{\gamma_m} \exp\left\{-(C_1-\varepsilon_1)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\},$$

где P_m, γ_m — некоторые постоянные. Используя оценки (13) и (14), покажем, что K_{ν_0+m+1} удовлетворяет неравенству

$$|K_{\nu_0+m+1}(t, R, \tau, S)| \leqslant P_m C(\varepsilon) g \left[\int\limits_\tau^t \frac{(\beta-\tau)^{\gamma_m} \alpha\beta}{(t-\beta)^{1-\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-C_2\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\}, \quad \mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right) = \left|\pm\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)\right|,$$

откуда

$$|K_{\nu_0+m+1}(t, R, \tau, S)| \leqslant 2P_m C g (t-\tau)^{\gamma_m+\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \exp\left\{-C(\varepsilon)\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \int\limits_0^1 s^{\gamma_m}(1-s)^{-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}\, ds.$$

Последний интеграл — В-функция Эйлера: $B(\gamma_m - 1, \; 1-\mu) = \frac{\Gamma(\gamma_m+1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\gamma_m+2-\mu)}$. Следовательно, получим оценку

$$|K_{\nu_0+m+1}(t, R, \tau, S)| \leqslant P_{m+1}(t-\tau)^{\gamma_{m+1}} \exp\left\{-C_\nu\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)\right\}, \tag{15}$$

$$P_{m+1} = 2CgP_m \frac{\Gamma\left[m\left(1-\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right)+1\right]}{\Gamma\left[m\left(1-\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right)+2-\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right]} \times$$

$$\times \Gamma\left[\frac{\alpha}{2b}-\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$\gamma_{m+1} = (m-1)\left(\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\frac{1}{2b}-\frac{\mu_1}{2}+1\right),$$

$$m > \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right) n \left[\frac{\alpha}{2b}+\mu_1\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

С помощью индукции можна показать, что (15) имеет место для любого m. По формуле Стирлинга $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{m-1}}{P_m} = 0$.

Следовательно, ряд (4) сходится абсолютно и равномерно во всей области $0 < \delta \leqslant t \leqslant T$, S, $R \in E_{2n}$ и для его суммы $\varphi(t, R, \tau, S)$ при $\rho(t, R,$

$\tau, S) < r$ справедлива оценка

$$|\varphi(t, R, \tau, S)| \leqslant C\rho(t, R, \tau, S)^{-n+\mu} \exp\left\{-C^* \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}, \tag{16}$$

при $\rho(t, R, \tau, S) \geqslant r$

$$|\varphi(t, R, \tau, S)| \leqslant C\rho(t, R, \tau, S)^{-n-\mu} \exp\left\{-C^* \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-1+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{17}$$

Исходя из оценок для $K(t, R, \tau, S)$ и из (16), (17), можно показать, что $\varphi(t, R, \tau, S)$ удовлетворяет условию Гельдера по x с показателем $0 < \alpha_1 < [\alpha - \mu(b-1)]$, учитывая условие на коэффициенты, как в параболическом случае [4], доказываем, что $\varphi(t, R, \tau, S)$ b раз непрерывно дифференцируемая функция по y.

При $\rho(t, R, \tau, S) < 2r$ справедливы оценки

$$|\varphi'_y(t, R, \tau, S)| \leqslant C\rho(t, R, \tau, S)^{-n+\mu} \exp\left\{-C^* \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-\frac{5}{2}+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)}, \tag{18}$$

при $\rho(t, R, \tau, S) \geqslant 2r$

$$|\varphi'_y(t, R, \tau, S)| \leqslant C\rho(t, R, \tau, S)^{-n-\mu} \exp\left\{-C^* \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-\frac{5}{2}+\frac{\alpha}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{19}$$

Из представления для $Z(t, R, \tau, S)$ и свойств $\varphi(t, R, \tau, S)$ получаем, что фундаментальное решение, $2b$ раз непрерывно дифференцируемое по x: имеет первые непрерывные производные по y и t. Имеют место оценки, при $\rho(t, R, \tau, S) < r$

$$|D_t^{k_1} D_y^{k_2} D_x^{k_3} Z(t, R, \tau, S)| \leqslant C \exp\left\{-C_2 \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times \rho(t, R, \tau, S)^{-n+\mu} (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-\frac{|k_3|}{2n}-|k_1|-\frac{3|k_2|}{2}-\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)},$$

при $\rho(t, R, \tau, S) \geqslant r$

$$|D_t^{k_1} D_y^{k_2} D_x^{k_3} Z(t, R, \tau, S)| \leqslant C \exp\left\{-C_2 \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right\} \times$$

$$\times \rho(t, R, \tau, S)^{-n-\mu} (t-\tau)^{-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2b}\right)n-|k_1|-\frac{3}{2}|k_2|-\frac{|k_3|}{2b}+\mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b}\right)},$$

где $|k_3| \leqslant 2b$, $|k_1| \leqslant 1$, $|k_2| \leqslant 1$, если $|k_j| \neq 0$, то $k_i = 0$, $k_l = 0$, $j, i, l = 1, 2, 3$, т. е. фундаментальное решение сохраняет по x экспоненциальные оценки, как в случае $b = 1$, и убывает степенным образом по y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малицкая А. П. Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений.— В кн.: Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Киев. пединститут, 1973, с. 109—130.
2. Эйдельман С. Д., Малицкая А. П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 7, с. 1316—1330.
3. Погожельский В. Исследование интегралов параболических уравнений краевых задач в неограниченных областях.— Мат. сборник. Новая серия, 1959, **47**, № 4, с. 397—430.
4. Эйдельман С. Д. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 444 с.

Ивано-Франковский
педагогический институт

Поступила в редакцию
19.III 1979 г.