УДК 517.9

А. М. Самойленко

Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий

Рассмотрим линейное расширение динамической системы на торе, определив его, как в [1], системой уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

векторы a, f и матрица P которой принадлежат пространству непрерывных периодических по φ периода 2π функций — пространству $C(\mathcal{T}_m)$, где m — число угловых координат вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Предположим, что функция a удовлетворяет условию Липшица по $\varphi : a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ с постоянной, не зависящей от φ. Обозначим через $\varphi_t(\varphi)$ решение первого из уравнений системы (1), причем такое, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Будем считатать φ точкой m-мерного тора $\mathcal{T}_m$. Через $\Omega_{t_0}^t(\varphi)$ обозначим матрицант системы

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

т. е. фундаментальную матрицу системы (2), принимающую при $t = t_0$ значение единичной матрицы E.

В работе [1] были указаны необходимые условия существования инвариантного тора системы (1) при произвольной функции $f \in C(\mathcal{T}_m)$. Эти условия требуют вырожденности ядра оператора $L : C'(\mathcal{T}_m) \to C(\mathcal{T}_m)$:

$$Lu(\varphi) = \dot{u}(\varphi) - P(\varphi)u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{3}$$

и тривиальности ядра сопряженного оператора L^*.

В работах [2—4] указаны достаточные условия существования инвариантного тора системы (1) при произвольной функции $f \in C(\mathcal{T}_m)$. Общее из этих условий требует существования функции Грина задачи об инвариантных торах системы (1), т. е. требует существования матричной функции

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau \leqslant 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi)[E - C(\varphi_\tau(\varphi))] & \text{при } \tau > 0, \end{cases} \tag{4}$$

матрица $C(\varphi)$ которой принадлежит пространству $C(\mathcal{T}_m)$ и выбрана так, чтобы обеспечивать равномерную ограниченность интеграла от $\| G_0(\tau, \varphi) \|$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \| d\tau \leqslant K, \tag{5}$$

K — постоянная, не зависящая от φ.

При существовании такой функции система (1) имеет инвариантный тор для произвольной функции $f \in C(\mathcal{T}_m)$, этот тор принадлежит пространству $C'(\mathscr{T}_m)$ и определяется равенством [4]:

$$x = u(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m, \quad u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau. \tag{6}$$

Из необходимых условий существования инвариантного тора системы (1) сразу уже следует, что вырожденность ядра оператора L:

$$\operatorname{Ker} L = \{0/|t| \to +\infty\}, \tag{7}$$

является необходимым условием существования функции Грина (4), (5).

К настоящему времени не выяснен вопрос: может ли иметь система (1) функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ в условиях, когда ядро оператора L вырождено, но не тривиально:

$$\operatorname{Ker} L = \{0/|t| \to +\infty\} \neq \{0\}, \tag{8}$$

и эквивалентный первому — вопрос о единственности функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия единственности функции $G_0(\tau, \varphi)$ и вытекающие из единственности свойства этой функции.

Указанные условия требуют тривиальности ядра оператора L:

$$\operatorname{Ker} L = \{0\}, \tag{9}$$

равносильной отсутствию ненулевых инвариантных торов однородной системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)\, x; \tag{10}$$

свойства функции $G_0(\tau, \varphi)$, вытекающие из единственности, характеризуются соотношениями (31), (32), равносильными определенному характеру поведения траекторий системы (10), о чем речь будет идти позже.

Перейдем к изложению основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть $a \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathscr{T}_m)$, $P \in C(\mathscr{T}_m)$ и система уравнений* (10) *имеет функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$. Тогда эта система имеет функцию Грина $G_1(\tau, \varphi) \neq G_0(\tau, \varphi)$, если и только если система* (10) *имеет нетривиальный инвариантный тор.*

Доказательство. Пусть система уравнений (10) имеет две функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ и $G_1(\tau, \varphi)$.

Из определения этих функций следует, что

$$G_1(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \varphi) = \Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi)), \tag{11}$$

где R — ненулевая матрица из $C(\mathscr{T}_m)$, и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| \Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi)) \|\, d\tau \leqslant K, \tag{12}$$

где K — некоторая постоянная, не зависящая от φ.

Оператор $T: C(\mathscr{T}_m) \to C'(\mathscr{T}_m)$, задаваемый соотношением

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau, \tag{13}$$

обладает тем свойством, что множество

$$x = u_0(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m, \quad u_0 = Tf \quad \forall f \in C(\mathscr{T}_m) \tag{14}$$

определяет инвариантный тор системы уравнений (10).

Теорема будет в одну сторону доказана, если установим, что $u_0 \not\equiv 0$ для некоторой функции $f \in C(\mathcal{T}_m)$ или (что то же самое), что оператор T не есть нуль-оператор в $C(\mathcal{T}_m)$, т. е. T не удовлетворяет соотношению

$$Tf = 0 \quad \forall f \in C(\mathcal{T}_m). \tag{15}$$

Предположим, что это не так, следовательно, справедливо соотношение (15). Покажем, что тогда необходимо

$$R(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{16}$$

что противоречит условию

$$R(\varphi) \not\equiv 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{17}$$

Переходя к доказательству соотношения (16), рассмотрим сперва значения матрицы R в точках, принадлежащих периодическим траекториям на $\mathcal{T}_m$. Пусть φ_0 — такая точка, $\varphi = \varphi_{t+T_1}(\varphi_0) = \varphi_t(\varphi_0) \bmod 2\pi$, $t \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ — соответствующая ей траектория, T_1 — ее период. Из теоремы Флоке—Ляпунова следует тогда, что

$$\Omega_0^t(\varphi_0) = \Phi(t) e^{At}, \tag{18}$$

где Φ — периодическая периода T_1 невырожденная матрица, A — постоянная матрица. С учетом (18) находим для $Tf(\varphi_0)$ выражение

$$Tf(\varphi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0))\, d\tau =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_1} e^{-ApT_1} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0) f(\varphi_\tau(\varphi_0))\, d\tau = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (e^{-AT_1})^p B_f, \tag{19}$$

где

$$B_f = \int_0^{T_1} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0))\, d\tau. \tag{20}$$

Так как ряд $\sum_{p=-\infty}^{\infty} (e^{-AT_1})^p$ расходится при любой матрице A, то $Tf(\varphi_0) = 0$ лишь тогда, когда

$$B_f = 0. \tag{21}$$

При рассмотрении равенства (21) будем различать два подслучая, когда φ_0 — точка покоя и когда φ_0 — точка «истинно» периодической траектории.

В первом случае равенство (21) справедливо для любого $T_1 \geqslant 0$ и возможно в силу этого лишь тогда, когда

$$R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0)) = 0, \tag{22}$$

что из-за тождества $\varphi_\tau(\varphi_0) = \varphi_0$ и произвольности функции f равносильно равенству

$$R(\varphi_0) = 0. \tag{23}$$

Во втором случае обозначим через T_1 наименьший положительный период решения $\varphi_t(\varphi_0)$ системы на торе $\mathcal{T}_m$. Точке $\varphi_t(\varphi_0)$ тора $\mathcal{T}_m$ можем взаимно однозначно поставить в соответствие точку $\psi_t = \nu t$, $\nu = \dfrac{2\pi}{T_1}$, окружности $\mathcal{T}_1$ и использовать это соответствие для того, чтобы произвольной функции $F \in C(\mathcal{T}_1)$ сопоставить некоторую функцию $f \in C(\mathcal{T}_m)$, связанную с F соотношением

$$f(\varphi_t(\varphi_0)) = F(\nu t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

Равенство (21) принимает в этом случае вид

$$\int_0^{T_1} e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) F(\nu\tau)\, d\tau = 0. \tag{25}$$

Из того, что оно должно выполняться для произвольной функции F из $C(\mathcal{T}_1)$, следует уже, что $e^{-A\tau}\Phi^{-1}(\tau) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_1$, т. е.

$$R(\varphi_\tau(\varphi_0)) = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_1. \tag{26}$$

Таким образом, для любой точки φ_0, принадлежащей периодическим траекториям на $\mathcal{T}_m$, выполняется соотношение (23).

Рассмотрим значения матрицы $R(\varphi)$ в остальных точках тора $\mathcal{T}_m$. Пусть φ_0 — такая точка, $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$, $t \in \mathbf{R}$, — соответствующая ей траектория. Из равномерной ограниченности интеграла (12) следует существование убывающей к нулю последовательности положительных чисел ε_n, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и возрастающей к $+\infty$ последовательности чисел t_n, $t_{n+1} > t_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{t_n} \| \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \|\, d\tau + \int_{t_n}^{+\infty} \| \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \|\, d\tau < \varepsilon_n. \tag{27}$$

Пусть $Tf(\varphi_0) = 0$. Тогда

$$\left\| \int_{-t_n}^{t_n} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0))\, d\tau \right\| \leqslant \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f(\varphi_\tau(\varphi_0))\, d\tau \right\| + \tag{28}$$

$$+ \left[\int_{-\infty}^{-t_n} \| \Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \|\, d\tau + \int_{t_n}^{+\infty} \| \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) \|\, d\tau \right] |f|_0 \leqslant \varepsilon_n |f|_0,$$

где $|f|_0 = \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|f(\varphi)\|$.

Дуга $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$ $(-t_n \leqslant t \leqslant t_n)$ траектории на $\mathcal{T}_m$ является дугой без самопересечения, поэтому для любой непрерывной функции F, определенной для $t \in \mathbf{R}$, найдется функция $f_n \in C(\mathcal{T}_m)$, связанная с F соотношением $f_n(\varphi_t(\varphi_0)) = F(t)$ при $-t_n \leqslant t \leqslant t_n$.

Предположим, что $R(\varphi_t(\varphi_0)) \not\equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$. Тогда $\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0)) \not\equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$. Пусть $r_{ij}(t) = \{\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0))\}_{ij}$ — тот элемент матрицы $\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0))$, для которого выполняется неравенство $r_{ij}(t) \not\equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$.

Положим

$$\hat{r}_{ij}(t) = \begin{cases} r_{ij}(t) & \text{при } |r_{ij}(t)| \leqslant 1, \\ \operatorname{sign} r_{ij}(t) & \text{при } |r_{ij}(t)| > 1 \end{cases}$$

и возьмем скалярные функции $f_n \in C(\mathcal{T}_m)$ такими, чтобы выполнялись условия $f_n(\varphi_t(\varphi_0)) = \hat{r}_{ij}(t)$ при $-t_n \leqslant t \leqslant t_n$, $|f_n(\varphi)|_0 \leqslant 1$.

Рассмотрим неравенства (28) для функций $f_n(\varphi) e_j$, где $e_j = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$ — j-й единичный орт. Имеем

$$\left\| \int_{-t_n}^{t_n} \Omega_\tau^0(\varphi_0) R(\varphi_\tau(\varphi_0)) f_n(\varphi_\tau(\varphi_0)) e_j d\tau \right\| =$$

$$= \left| \int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau) \hat{r}_{ij}(\tau)\, d\tau \right| = \int_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau) \hat{r}_{ij}(\tau)\, d\tau \leqslant \varepsilon_n. \tag{29}$$

Так как $r_{ij}(t)\hat{r}_{ij}(t) \not\equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$, то $\int\limits_{-t_N}^{t_N} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau)\,d\tau = \delta_1 > 0$ для некоторого достаточно большого N. Но тогда из-за неотрицательности функции $r_{ij}(t)\hat{r}_{ij}(t)$ имеем $\int\limits_{-t_n}^{t_n} r_{ij}(\tau)\hat{r}_{ij}(\tau)\,d\tau > \delta_1 \quad \forall n > N$, что противоречит неравенству (28) и условию $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Противоречие доказывает, что $r_{ij}(t) = 0$ $\forall t \in R$, т. е. доказывает равенство нулю матрицы $\Omega_t^0(\varphi_0) R(\varphi_t(\varphi_0))$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Последнее равносильно равенству (23) для рассматриваемой точки $\varphi_0 \in \mathscr{T}_m$. Этим доказано, что равенство (23) справедливо для любой точки $\varphi_0 \in \mathscr{T}_m$, что противоречит условию (17). В одну сторону теорема доказана.

Пусть система (10) имеет нетривиальный инвариантный тор

$$x = u_0(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m, \quad u_0 \not\equiv 0. \tag{30}$$

Покажем, что в данном случае эта система не может иметь лишь одну функцию Грина. Для этого воспользуемся приведенными ниже свойствами функции Грина G_0 (τ, φ), вытекающими из предположения о ее единственности.

Лемма. *Если $G_0(\tau, \varphi)$ — единственная функция Грина системы уравнений* (10), *то матрица $C(\varphi) = G_0(0, \varphi)$ удовлетворяет соотношениям*

$$C(\varphi_t(\varphi)) = \Omega_0^t(\varphi) C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \varphi \in \mathscr{T}_m, \tag{31}$$

$$C^2(\varphi) = C(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathscr{T}_m. \tag{32}$$

Лемма доказывается от противного. Именно, из предположения о нарушении соотношения (31) сразу же следует, что функция

$$G_1(\tau, \varphi) = G_0(\tau, \varphi) + \Omega_\tau^0(\varphi) R(\varphi_\tau(\varphi)), \tag{33}$$

где R матрица вида

$$R(\varphi) = \Omega_t^0(\varphi) C(\varphi_t(\varphi)) - C(\varphi) \Omega_t^0(\varphi), \tag{34}$$

взятая для того значения t, для которого $R(\varphi) \neq 0$ для некоторого $\varphi \in \mathscr{T}_m$, удовлетворяет условию равномерной ограниченности интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| G_1(\tau, \varphi) \| \, d\tau \leqslant K_1, \tag{35}$$

следовательно, является отличной от $G_0(\tau, \varphi)$ функцией Грина системы (10).

Из предположения о нарушении соотношения (32) следует аналогичная (35) оценка для функции

$$G_1(\tau, \varphi) = G_0(\tau, \varphi) + \Omega_\tau^0(\varphi) (C^2(\varphi_\tau(\varphi)) - C(\varphi_\tau(\varphi))), \tag{36}$$

благодаря которой эта функция является отличной от $G_0(\tau, \varphi)$ функцией Грина системы (10).

В обоих случаях существование функции $G_1(\tau, \varphi)$ противоречит условию единственности функции Грина.

Перейдем к завершению доказательства теоремы. Пусть несмотря на существование тора (30) система уравнений (10) имеет лишь одну функцию Грина — функцию $G_0(\tau, \varphi)$. Используя ее, запишем инвариантный тор системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi) x + u_0(\varphi). \tag{37}$$

Имеем

$$x = u_1(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m, \quad u_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi) u_0(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau, \tag{38}$$

или с учетом того, что $u_0(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi)\, u_0(\varphi)$,

$$u_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)\, \Omega_0^\tau(\varphi)\, u_0(\varphi)\, d\tau. \tag{39}$$

Учитывая соотношение (31), справедливое для функции $C(\varphi)$ в силу ее единственности, из (39) получаем равенство

$$u_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} C(\varphi)\, u_0(\varphi)\, d\tau - \int_{0}^{\infty} (E - C(\varphi))\, u_0(\varphi)\, d\tau, \tag{40}$$

возможное лишь тогда, когда $C(\varphi)\, u_0(\varphi) = 0$ и $C(\varphi)\, u_0(\varphi) = u_0(\varphi)$ одновременно. Но тогда $u_0(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{T}_m$, что противоречит нетривиальности тора $x = u_0(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$. Противоречие доказывает теорему 1 в другую сторону.

Основные свойства функции Грина, вытекающие из предположения о единственности такой функции, определим соотношениями (31) и (32). Первое из них равносильно тому, что матрица $C(\varphi)$ принадлежит пространству $C'(\mathscr{T}_m)$ и является решением матричного уравнения

$$\dot{C} = P(\varphi)\, C - CP(\varphi). \tag{41}$$

Покажем, что это соотношение — характеристическое свойство единственности функции Грина, именно: если система уравнений (10) имеет более одной функции Грина—такая возможность априори допустима,— то ни одна из них не удовлетворяет соотношению (31). Сформулируем сказанное в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Пусть система уравнений* (10) *такова, что* $a \in C_{Lip}(\mathscr{T}_m)$, $P \in C(\mathscr{T}_m)$. *Предположим, что эта система имеет нетривиальный инвариантный тор. Тогда ни одна из функций Грина системы* (10) *не удовлетворяет соотношению* (31).

Переходя к доказательству теоремы 2, будем считать, что соотношение (30) определяет инвариантный тор системы уравнений (10) и что $G_0(\tau, \varphi)$—ее функция Грина, удовлетворяющая равенству (31). Функция $u_1 \in C(\mathscr{T}_m)$, определяемая равенствами (38), задает тогда инвариантный тор системы уравнений (37). При выполнении соотношения (31) функция (39) определяется тогда равенством (40), что возможно лишь при условии, что $u_1(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{T}_m$. Но тогда $\dot{u}_1(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{T}_m$ и из инвариантности тора (38) системы (37) следует, что

$$u_0(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{T}_m. \tag{42}$$

Равенство (42) противоречит нетривиальности тора (30), следовательно, доказывает теорему 2.

Необходимые и достаточные условия единственности функции Грина, данные теоремой 1, требуют при их проверке решения вопроса о нетривиальных инвариантных торах системы (10). Для некоторых систем такая проверка тривиально приводит к условиям существования функции Грина. Действительно, так как функция Грина системы (10) существует, как это указано выше, лишь у систем, нетривиальные инвариантные торы которой вырождены, то при существовании функции Грина достаточным условием ее единственности есть отсутствие нетривиальных вырожденных торов системы (10). Как отмечалось в [1], вырожденные инвариантные торы системы (10) имеют непустое множество в пересечении с плоскостью $x = 0$, которое принадлежит множеству блуждающих точек динамической системы $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$. В силу этого справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $a \in C_{Lip}(\mathscr{T}_m)$, $P \in C(\mathscr{T}_m)$. *Предположим, что система уравнений* (10) *имеет функцию Грина* (4), (5).

Тогда, если множество блуждающих точек системы $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ пусто, то функция Грина единственна.

Так как для квазипериодической системы — системы (10) при $a = \omega$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$,— базис частот,— множество блуждающих точек на $\mathcal{T}_m$ пусто, то функция Грина квазипериодической системы согласно теореме 3 единственна.

Заметим, наконец, что поскольку доказательства теорем настоящей статьи не используют специфических свойств динамических систем на торе, эти теоремы остаются в силе, когда динамическая система $\varphi_t(\varphi)$ задана на произвольном компактном многообразии. Это замечание было высказано автору статьи рецензентом, за что я ему очень признателен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М. Необходимые условия существования инвариантных торов линейных расширений динамических систем на торе.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 8, с. 1427—1437.
2. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения.— Успехи мат. наук, 1968, **23**, вып. 4, с. 179—238.
3. Sacker R. A New Approach to the Perturbation Theory of Invariant Surfaces.— Comm. Pure Appl. Math., 1965, **18**, № 4, p. 717—732.
4. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
8.V 1979 г.