

УДК 519.41/47

П. П. Барышовец

**Конечные неабелевы  $p$ -группы  
с дополняемыми неабелевыми подгруппами**

Известно, что группы, в которых дополняемы все абелевы подгруппы, вполне факторизуемы [1—3]. В связи с этим в [4] был поставлен вопрос о строении неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами. В работах автора [5—6] изучались конечные неабелевы  $p$ -группы, удовлетворяющие этому условию; при этом остался неисследованным случай, когда  $p > 2$  и индекс централизатора коммутанта в группе равен  $p^2$ .

Цель настоящей заметки — доказать следующую теорему, описывающую этот случай.

**Теорема.** Пусть  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа ( $p > 2$ ), в которой  $|G : C_G(G')| = p^2$ . В группе  $G$  тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда  $G = A \times B$ , где  $B$  — элементарная абелева группа,  $A = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$  с  $a_1^p = a_2^p = a_3^p = a^p = b^p = 1$ ,  $[a_i, a] = [a_i, b] = 1$ ,  $i = 1, 2$ ,  $[a_3, a] = a_1$ ,  $[a_3, b] = a_2$ ,  $[a, b] = a_3$ .

1. Пусть  $G$  — произвольная неабелева группа, обладающая таким свойством: любая неабелева подгруппа из  $G$  дополняема в  $G$ . Тогда все неабелевы подгруппы и неабелевы фактор-группы группы  $G$ , а также все прямые произведения вида  $G \times H$ , где  $H$  — абелева вполне факторизуемая группа, обладают тем же свойством. Кроме того, фактор-группа группы  $G$  по ее неабелевому нормальному делителю вполне факторизуема.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если  $|G : C_G(G')| = p^2$ , то в группе  $G$  существуют такие элементы  $a$  и  $b$  порядка  $p$ , что  $G' = \langle G', a, b \rangle'$ .

Доказательство. Заметим сначала, что группа  $G$ , очевидно, не содержит абелевых подгрупп индекса  $p$ . В силу леммы 4 [5]  $G = G' \langle c \rangle \rtimes L$ , где  $c^p = 1$  и  $[G', c] \neq 1$ . Далее, согласно лемме 1 [6]  $L = L_1 \times \langle a \rangle$  с  $|a| = p$  и  $[L_1, G'] = 1$ . Если  $[G', a] = 1$ , то  $\langle G', L \rangle$  — абелева подгруппа индекса  $p$  в группе  $G$ , что противоречит сделанному выше замечанию. Следовательно,  $[G', a] \neq 1$  и поэтому

$$G = G' \langle a \rangle \rtimes T, \tag{1}$$

где  $T = \langle b \rangle \times T_1$ ,  $b^p = 1$  и  $[G', T_1] = 1$  (см. лемму 1 [6]). Если  $G' \times L_1 \neq G' \times T_1$ , то  $\langle G', T_1, L_1 \rangle = C_G(G')$  и, значит,  $|G : C_G(G')| = p$ , что противоречит условию доказываемой леммы. Поэтому

$$G' \times L_1 = G' \times T_1. \tag{2}$$

Тогда, используя (1), получаем  $G' = \langle (G' \langle a \rangle)', T' \rangle [G' \langle a \rangle, T] = (G' \langle a \rangle)' \times [G' \langle a \rangle, T]$ . При этом

$$[G' \langle a \rangle, T] = [G' \langle a \rangle, \langle b \rangle \times T_1] = [G' \langle a \rangle, b] \cdot [G' \langle a \rangle, T_1]. \tag{3}$$

Используем далее (2):

$$\begin{aligned} [G' \langle a \rangle, T_1] &= [\langle a \rangle, T_1] \subseteq [a, G' \times T_1] = [a, G' \times L_1] = [a, L_1 \times G'] = [a, G'] = \\ &= (G' \langle a \rangle)'. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3) следует, что  $(G' \langle a, b \rangle)' = G'$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа ( $p > 2$ ) с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если  $|G:G'| = p^2$  и  $G' = C_G(G')$ , то группа  $G$  удовлетворяет условию теоремы (при  $B = 1$ ).

**Доказательство.** В силу леммы 1 в группе  $G$  существуют такие элементы  $a$  и  $b$ , что  $G = G' \langle a, b \rangle$ . Так как  $G' \not\subseteq Z(G)$  ввиду соотношения  $G' = C_G(G')$ , то  $|G'| \geq p^2$ . Пусть  $K$  — такая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в коммутанте  $G'$ , что  $|G':K| = p^2$ . Тогда фактор-группа  $\bar{G} = G/K$  имеет порядок  $p^4$ , причем порядок ее коммутанта  $\bar{G}'$  равен  $p^2$  (здесь и ниже  $\bar{H}(\bar{x})$  обозначает образ подгруппы  $H$  (элемента  $x$ ) группы  $G$  в соответствующей фактор-группе этой группы). Как следует из описания групп порядка  $p^4$  (см. [7, с. 346]),  $\bar{G} = M \times N$ , где  $M$  — нециклическая абелева группа порядка  $p^3$  и  $|N| = p$ . Так как  $|Z(\bar{G})| = p$ , то подгруппа  $M$  содержит две подгруппы  $\bar{S}$  и  $\bar{T}$  порядка  $p^2$  (причем одна из них (скажем,  $\bar{S}$ ) нормальна в  $\bar{G}$ ), недополняемые в  $\bar{G}$ . Но тогда их прообразы  $S$  и  $T$  в группе  $G$  абелевы, причем  $S \triangleleft G$  и  $|G:ST| = p$ . Нетрудно убедиться, что  $|(ST)'| = p$ .

Так как коммутант  $G'$  ввиду следствия 2 [6] является элементарной абелевой группой, то  $ST = G' \langle d \rangle$ , где  $d$  — элемент порядка, не превышающего  $p^2$ .

Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные элементы группы  $G$ , не содержащиеся в подгруппе  $G' \langle d \rangle$ . Покажем, что  $G' \cap C_G(x) = G' \cap C_G(y)$ ,  $|C_G(x)| \leq p^3$  и  $C_G(x) = Z(G' \langle x \rangle) \langle x \rangle$ . В самом деле, если  $L = (G' \langle d \rangle)'$  и  $\bar{G} = G/L$ , то  $\bar{G} = \langle \bar{G}', \bar{d} \rangle \langle \bar{x} \rangle$ , где  $\langle \bar{G}', \bar{d} \rangle$  — абелева подгруппа индекса  $p$  в  $\bar{G}$ . Но тогда ввиду соотношения  $|\bar{G}:\bar{G}'| = p^2$  имеем  $|Z(\bar{G})| = p$  и  $|C_{\bar{G}}(\bar{x})| = p^2$  и потому  $|C_G(x)| \leq p^3$ . Так как  $1 \neq G' \cap Z(G) \subseteq C_G(x) \cap C_G(y)$ , то  $p \leq |G' \cap C_G(x)| \leq p^2$ . Если  $|G' \cap C_G(x)| = |G' \cap C_G(y)| = p$ , то, очевидно,  $G' \cap C_G(x) = G' \cap C_G(y)$ .

Пусть  $|G' \cap C_G(x)| = |G' \cap C_G(y)| = p^2$ . Предположим, что  $G' \cap C_G(x) \neq G' \cap C_G(y)$ . Тогда ввиду соотношения  $L \subseteq Z(G)$  в фактор-группе  $\bar{G} = G/L$  подгруппы  $\bar{G}' \cap C_{\bar{G}}(\bar{x})$  и  $\bar{G}' \cap C_{\bar{G}}(\bar{y})$  имеют порядок  $p$  и не совпадают. Так как обе они содержатся в центре  $Z(\bar{G})$  и  $|Z(\bar{G})| = p$ , то получили противоречие. Следовательно, и в рассматриваемом случае  $G' \cap C_G(x) = G' \cap C_G(y)$ .

Пусть  $|C_G(x) \cap G'| \cdot |C_G(y) \cap G'| = p^3$ . Для определенности будем считать, что  $|G' \cap C_G(x)| = p^2$  и  $|G' \cap C_G(y)| = p$ . Тогда, очевидно,  $C_G(y) \cap G' = Z(G) \cap G'$  и потому  $C_G(y) \cap G' \subseteq C_G(x) \cap G'$ .

Обозначим пересечение  $G' \cap C_G(x)$  через  $Q$ . Очевидно,  $|Q| \leq p^2$  и для любого элемента  $z \in G$ ,  $z \in G' \langle d \rangle$ , имеет место включение  $G' \cap C_G(z) \subseteq Q$ . Отметим также, что если  $|Q| = p^2$ , то  $d^p \in Q$ . В самом деле, иначе в фактор-группе  $\bar{G} = G/L$  подгруппа  $\langle d^p \rangle Q$  порядка  $p^2$  содержится в центре  $Z(\bar{G})$ , порядок которого равен  $p$ . Следовательно,  $d^p \in Q$ . Далее,  $Z(G' \langle x \rangle) \subseteq C_G(x)$  и  $C_G(x) \subseteq G' \langle x \rangle$ . Значит,  $C_G(x) = (C_G(x) \cap G') \langle x \rangle = Z(G' \langle x \rangle) \langle x \rangle$  и потому  $Q \triangleleft G$ . Рассмотрим следующие случаи:

а)  $|Q, d| \neq 1$ . Тогда  $|Q| = p^2$ . Так как  $d^p \in Q$ , то  $|Q \langle d \rangle| = p^3$ . По условию леммы подгруппа  $Q \langle d \rangle$  дополняема в  $G$ ; пусть  $G = Q \langle d \rangle \cdot W$ ,  $Q \langle d \rangle \cap W = 1$ . Так как  $Q \langle d \rangle \subseteq G' \langle d \rangle$ , то  $W \not\subseteq G' \langle d \rangle$ . Пусть  $t \in W$ ,  $t \in G' \langle d \rangle$ . Тогда ввиду соотношения  $G' \cap C_G(t) \subseteq Q$  элемент  $t$  имеет порядок  $p$  и  $C_W(t) = \langle t \rangle$ . Но если  $|W| > p$ , то  $|C_W(t)| > p$ . Следовательно,  $|W| = p$  и  $|G| = p^4$ ,  $|G'| = p^2$ . Но тогда  $|G:C_G(G')| = p$ , вопреки условию леммы. Таким образом, этот случай невозможен;

6)  $[Q, d] = 1$ . Так как  $(Q \langle d \rangle)' \subseteq Z(G)$ , то  $(G' \langle d \rangle)' \subseteq Q$ . Пусть  $c \in G'$ ,  $[c, d] \neq 1$ . Тогда  $(Q \times \langle c \rangle) \langle d \rangle$  — неабелева подгруппа порядка  $\leq p^4$ . Аналогично предыдущему случаю получаем, что  $|G| \leq p^5$  и  $|G'| \leq p^3$ . Далее, если  $|G'| < p^3$ , то  $|G : C_G(G')| \leq p$ . Следовательно,  $|G'| \leq p^3$  и  $|G| = p^5$ . Отметим также, что  $Q \subseteq Z(G) \cap G'$ . Предположим сначала, что  $|Q| = p$ . Тогда, очевидно, класс нильпотентности группы  $G$  равен 4 и  $G$  — группа максимального класса. Ввиду теорем 14.4 и 14.17 из книги [7, гл. III]  $p > 3$ . Но тогда  $G$  — регулярная группа (см. теорему 10.2, там же) и потому ввиду разложения  $G = G' \langle a \rangle \langle b \rangle$  с  $a^p = b^p = 1$  экспонента группы  $G$  равна  $p$ . Следовательно,  $|d| = p$  и порядок подгруппы  $(Q \times \langle c \rangle) \langle d \rangle$  равен  $p^3$ , а порядок группы  $G$  —  $p^4$ . Из полученного противоречия вытекает, что  $|Q| = p^2$ . Но тогда  $G = (((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle) \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle)$  и  $\langle a_1, a_2 \rangle = Z(G)$ . Если  $(G' \langle a \rangle)' = (G' \langle b \rangle)' = D$ , то в группе  $\bar{G} = G/D$   $\bar{G}' \subseteq Z(\bar{G})$ . Значит,  $|\bar{G} : Z(\bar{G})| = p^2$  и  $|\bar{G}'| = p$ . Поэтому  $|D| = p^2$ , что невозможно ввиду отношения  $\langle a_1, a_2 \rangle = Z(G)$ . Из полученного противоречия следует, что  $(G' \langle a \rangle)' \neq (G' \langle b \rangle)'$ . Кроме того,  $(G' \langle a \rangle)' \triangleleft G$  и  $(G' \langle b \rangle)' \triangleleft G$ , причем  $|(G' \langle a \rangle)'| = |(G' \langle b \rangle)'| = p$  и потому  $(G' \langle a \rangle)' (G' \langle b \rangle)' \subseteq Z(G)$ . Следовательно, не теряя общности, можно считать, что  $(G' \langle a \rangle)' = \langle a_1 \rangle$ ,  $(G' \langle b \rangle)' = \langle a_2 \rangle$  и  $[a, b] = a_3$ . Таким образом,  $G$  — группа, указанная в условии леммы. Лемма доказана.

**Следствие 1.** Если  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа ( $p > 2$ ) с дополняемыми неабелевыми подгруппами, у которой  $|G : C_G(G')| = p^2$ , то  $|G'| = p^3$  и  $|G' \cap Z(G)| = p^2$ .

**Следствие 2.** Пусть  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа ( $p > 2$ ) с дополняемыми неабелевыми подгруппами, у которой  $|G' : C_G(G')| = p^2$ . Если  $K$  — произвольный нормальный делитель порядка  $p$  группы  $G$ , содержащийся в ее коммутанте  $G'$ , то в фактор-группе  $G/K$  коммутант  $G'/K$  не содержится в центре  $Z(G/K)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $G$  — конечная неабелева  $p$ -группа ( $p > 2$ ) с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если  $G$  — прямо неразложимая группа и  $|G : C_G(G')| = p^2$ , то  $|G| \leq p^6$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству соотношений (1) и (2) (см. доказательство леммы 1) в группе  $G$  можно выделить элементарные абелевы подгруппы  $L$  и  $T$  индекса  $|G'|/p$  в  $G$ , удовлетворяющие соотношениям:  $G' \cap L = G' \cap T = 1$ ,  $L = \langle a \rangle \times L_1$ ,  $T = \langle b \rangle \times T_1$ ,  $\langle L_1, T_1 \rangle \subseteq C_G(G')$ ,  $G' \times T_1 = G' \times L_1$ , где  $b^p = a^p = 1$ . Обозначим через  $H$  подгруппу  $G'L$ . Очевидно, индекс  $|G : H|$  равен  $p$  и  $Z(H) = (G' \cap Z(G)) \times L_1$  — подгруппа индекса  $p^2$  в  $H$ . Отметим также, что

$$|Z(H) \cap G'| = p^2. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь подгруппу  $Q = Z(H) \times \langle b \rangle$ . Так как централизатор  $C_A(b)$  подгруппы  $\langle b \rangle$  в группе  $A = G' \times T_1 = G' \times L_1$  равен  $(G' \cap Z(G)) \times \langle T_1 \rangle$  и, следовательно, имеет в  $A$  индекс  $p$ , а подгруппа  $Z(T)$  содержится, очевидно, в  $A$ , то централизатор  $C_{Z(H)}(b)$  имеет в подгруппе  $Z(H)$  индекс  $p$ . Отсюда вытекает, что  $Q = Q_1 \times Q_2$ , где  $Q_1$  — неабелева группа порядка  $p^3$ , а  $Q_2$  — подгруппа из пересечения  $Z(H) \cap Z(Q)$ . Так как  $G = H \times \langle b \rangle$ , то  $Q_2 \subseteq Z(G)$ . Ввиду (4) и неабелевости группы  $Q_1$  порядок подгруппы  $Q_2$  не превышает числа  $p$ . Тогда  $|Q| \leq p^4$ ,  $|Z(H)| \leq p^3$  и  $|H| \leq p^5$ . Отсюда ввиду соотношения  $|G : H| = p$  получаем, что  $|G| \leq p^6$ . Лемма доказана.

**2. Доказательство теоремы. Необходимость.** Не теряя общности, можно считать, что  $G$  — прямо неразложимая группа. Порядок группы  $G$  согласно леммам 1, 2 и 3 равен  $p^5$  или  $p^6$ . Если  $|G| = p^5$ , то достаточно воспользоваться леммой 2. Покажем, что случай  $|G| = p^6$  невозможен.

Пусть  $|G| = p^6$ . Тогда рассуждениями, аналогичными содержащимся в доказательстве леммы 1, нетрудно убедиться в справедливости разложения  $G = ((\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$ , в котором  $a_1^p = a_2^p = a_3^p = a^p = b^p = c^p = 1$ ,  $\langle a_1, a_2 \rangle = Z(G)$ , и  $[b, c] = a_3$ ,  $[a_3, b] = a_1$ ,  $[a_3, c] = a_2$ ,  $[a, b] = 1$ . Покажем, что  $[a, c] = a_2^\beta$ , где  $1 \leq \beta \leq p$ . В самом деле, пусть  $[a, c] = a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — некоторые целые числа. Так как централизатор  $C_A(c)$  элемента  $c$  в подгруппе  $A = \langle a_1, a_2, a_3, a \rangle$  имеет порядок  $p^3$  (см. доказательство леммы 1), то  $C_A(c) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle w \rangle$ , где  $w = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} a^{\lambda_4}$  и  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  — некоторые целые числа, не все сравнимые с 0 по модулю  $p$ . Так как  $1 = [w, c] = a^{-\lambda_1} a_3^{-\lambda_2} a_2^{-\lambda_3} a_1^{-\lambda_4} c^{-1} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} a^{\lambda_4} c = a^{-\lambda_1} a_3^{-\lambda_2} a_2^{-\lambda_3} a_1^{-\lambda_4} a_1^{\alpha \lambda_1} a_2^{\beta \lambda_2} a_3^{\gamma \lambda_3} = a_1^{\alpha \lambda_1} a_2^{\beta \lambda_2 + \gamma \lambda_3} a_3^{\gamma \lambda_4}$ , то имеют место сравнения:  $\alpha \lambda_1 \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\gamma \lambda_4 \equiv 0 \pmod{p}$  и  $\lambda_3 + \beta \lambda_4 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Если  $\lambda_4 \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $w \in G'$  и, значит,  $c \in C_G(G')$ , что приводит к противоречию с условием  $|G' : C_G(G')| = p^2$ . Следовательно,  $\lambda_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$  и потому  $\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{p}$ . Таким образом, соотношение  $[a, c] = a_2^\beta$  доказано. Так как  $a \notin Z(G)$  и  $[a, b] = 1$ , то, не теряя общности, можно считать, что  $1 \leq \beta < p$ .

Покажем, что подгруппа  $A$  недополняема в группе  $G$ . Действительно, предположим, что  $G = A \times S$ . Обозначим через  $M$  подгруппу  $\langle a_2 \rangle \times \langle a \rangle$ . Так как  $M \triangleleft G$  и  $A = G/M$ , то  $G' = [A, S] = \langle [G', S], [M, S] \rangle$  и потому  $|G'| = p^2$ . Полученное противоречие доказывает, что подгруппа  $A$  в  $G$  недополняема.

Покажем, наконец, что неабелева подгруппа  $H = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3^{-\beta} a \rangle \times \langle b \rangle$  недополняема в группе  $G$ . В самом деле, пусть  $T$  — дополнение подгруппы  $H$  в группе  $G$ . Так как  $\langle a_1, a_2 \rangle \subset H$  и  $G/\langle a_1, a_2 \rangle$  — группа экспоненты  $p$ , то подгруппа  $T$ , очевидно, элементарная абелева. Так как  $H \subset A \langle b \rangle$ , то  $T \not\subset A \langle b \rangle$ . Значит, подгруппа  $T$  содержит элемент  $u = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} a_3^{\sigma_3} a^{\sigma_4} b^{\sigma_5} c^{\sigma_6}$  с  $\sigma_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Далее, пересечение  $A \cap T$  нетривиально, поэтому  $T$  содержит элемент  $v = a_1^{\tau_1} a_2^{\tau_2} a_3^{\tau_3} a^{\tau_4}$ . Очевидно,  $T = \langle u \rangle \times \langle w \rangle$ . При этом ввиду соотношения  $\langle a_1, a_2 \rangle \subseteq Z(G)$

$$1 = [u, v] = [b^{\sigma_5} c^{\sigma_6}, a_3^{\tau_3} a^{\tau_4}] = c^{-\sigma_6} a^{-\tau_4} a_1^{-\sigma_3 \tau_1} a_3^{-\tau_1} c^{\sigma_6} a_3^{\tau_1} a_4^{\tau_2} = \\ = a_2^{-\beta \tau_2 \sigma_4} a^{-\tau_2} a_1^{-\sigma_3 \tau_1} a_3^{-\tau_1} a_2^{-\tau_1 \sigma_4} a_3^{\tau_1} a^{\tau_2} = a_1^{-\sigma_3 \tau_1} a_2^{-\beta \tau_2 \sigma_4 - \tau_1 \sigma_4}.$$

Отсюда имеем:  $\sigma_3 \tau_1 \equiv 0 \pmod{p}$  и  $\sigma_4 \beta \tau_2 + \tau_1 \sigma_4 \equiv 0 \pmod{p}$ . Если  $\tau_1 \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $\sigma_4 \beta \tau_2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Так как  $\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $\sigma_4 \tau_2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Но  $\sigma_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Следовательно,  $\tau_2 \equiv 0 \pmod{p}$  и  $v \in G'$ . Так как  $\langle a_1, a_2 \rangle \subseteq H$ , то  $\langle a_1, a_2, v \rangle = G'$ . Но тогда  $[G', u] = 1$  и  $u \in C_G(G')$ . Последний факт противоречит соотношениям  $u \notin A$  и  $A = C_G(G')$ .

Следовательно,  $\tau_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  и  $\sigma_3 \equiv 0 \pmod{p}$ . Далее,  $\sigma_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$ , как уже отмечалось выше, и потому из сравнения  $\sigma_4 (\beta \tau_2 + \tau_1) \equiv 0 \pmod{p}$  следует сравнение  $\beta \tau_2 + \tau_1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Но тогда легко убедиться, что  $[v, c] = a_2^{\beta \tau_2 + \tau_1} = 1$  и потому  $v \in C_A(c)$ . С другой стороны, числа  $\tau_1 = -\beta$  и  $\tau_2 = 1$  тоже удовлетворяют указанному выше сравнению и потому  $C_A(c) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3^{-\beta} a \rangle \subseteq H$ . Из полученного противоречия вытекает недополняемость подгруппы  $H$  в группе  $G$ . Необходимость доказана.

Так как  $Z(G)$  — элементарная абелева группа индекса  $p^3$ , то дополняемость в группе  $G$  всех ее неабелевых подгрупп очевидна. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп. — *Мат. сб.*, 1954, 35, № 1, с. 93—128.
- Каргаполов М. И. Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп. — *ДАН СССР*, 1959, 127, № 6, с. 1164—1166.

3. Горчаков Ю. М. Прimitивно факторизуемые группы.— Уч. зап. Перм. ун-та, 1960, 17, вып. 2, с. 15—31.
4. Черников С. Н. Исследование групп с заданными свойствами подгрупп.— Укр. мат. журн., 1969, 21, № 2, с. 191—196.
5. Барышовец П. П. Конечные неабелевы 2-группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами.— В кн.: Теоретико-групповые исследования. Киев: Наук. думка, 1978, с. 34—50.
6. Барышовец П. П. О конечных неабелевых  $p$ -группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами.— В кн.: Строение групп и свойства их подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.
7. Huppert B. Endliche Gruppen I, Springer Verlag.— Berlin Heidelberg New York, 1967.— 793 S.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию  
12.VI 1978 г.