УДК 519.21

В. Л. Гирко

О единственности решения канонического спектрального уравнения

В работе автора [1] для преобразований Стилтьеса предельных нормированных спектральных функций случайных матриц было выведено функциональное уравнение, которое будем называть каноническим спектральным:

$$G(x, y, z, t) = \mathbf{P}\{\mathrm{Re}\,[1 + it\eta + t^2\xi_1(G(\cdot, 1, \cdot, t), z) + $$
$$+ it^2\xi_2(G(1, \cdot, \cdot, t), z)]^{-1} < x,$$
$$\mathrm{Im}\,[1 + it\eta + t^2\xi_1(G(\cdot, 1, \cdot, t), z) + it^2\xi_2(G(1, \cdot, \cdot, t), z)]^{-1} < y\}, \qquad (1)$$

где η — некоторая случайная величина, не зависящая от случайных функционалов $\xi_1(G(\cdot, 1, \cdot, t), z)$ и $\xi_2(G(1, \cdot, \cdot, t), z)$, двумерные распределения которых задаются с помощью преобразования

$$\mathbf{M}\exp\{-s_1\xi_1(G(\cdot, 1, \cdot, t), z) - is_2\xi_2(G(1, \cdot, \cdot, t), z)\} =$$
$$= \exp\left\{\int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 \left[\int_0^\infty (\exp\{-x^2(s_1y + is_2u)\} - 1)\, x^{-2} dK(v, z, x)\right] dG(y, u, v, t)\, dv\right\},$$
$$s_1 \geqslant 0,$$

функция $K(v, u, x)$ неубывающая и ограниченной вариации по x и непрерывна по u и v в области $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, в точке $x = 0$ $(e^{-x^2(s_1y+is_2u)} - 1)\, x^{-2} = -(s_1y + is_2u)$.

В настоящей статье приведено новое доказательство единственности решения уравнения (1) в классе L функций $G(x, y, z, t)$ являющихся функциями распределения по $x, y\left(0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant \frac{1}{2}\right)$ при любых фиксированных z, t, $0 \leqslant z \leqslant 1$, и таких, что любых целых $k > 0$, $l > 0$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$ функции $\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 x^k y^l dG(x, y, z, t)$ аналитические по t (за исключением, быть может, точки $t = 0$).

Для моментов функций $G(x, y, z, t)$ имеем уравнение

$$\int (x + iy)^k (x - iy)^l\, dG(x, y, z, t) = \int_0^\infty \exp\left\{it\eta(y_1 - y_2) + \right.$$

$$+\int_0^1\left[\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1\left[\int_0^\infty(\exp\{-t^2x^2(p_1(y_1+y_2)+ip_2(y_1-y_2))\}-1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times x^{-2}dK(v,z,x)\right]dG(p_1,p_2,v,t)\right]dv\Big\}y_1^{k-1}y_2^{l-1}e^{-y_1-y_2}\,dy_1dy_2\times$$

$$\times[(k-1)!\,(l-1)!]^{-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(-s_1)^k(k!)^{-1}(-s_2)^l(l!)^{-1}$ и присуммируем по k и l от 0 до ∞. Тогда

$$m(s_1+s_2,s_1-s_2,t,z)=1+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\left\{it\eta(y_1-y_2)+\int_0^1\left[\int_0^\infty(m(t^2x^2(y_1+y_2),\right.\right.$$

$$\left.\left.t^2x^2(y_1-y_2),t,v)-1)x^{-2}dK(v,z,x)\right]dv\right\}\sum_{k,l=1}^\infty(-s_1)^k(-s_2)^ly_1^{k-1}y_2^{l-1}\times$$

$$\times[(k-1)!\,k!\,(l-1)!\,l!]^{-1}e^{-y_1-y_2}dy_1dy_2+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\left\{it\eta y_1+\int_0^1\left[\int_0^\infty(m(t^2x^2(y_1+y_2),\right.\right.$$

$$\left.\left.0,t,v)-1)x^{-2}dK(v,z,x)\right]dv\right\}\sum_{k=1}^\infty y_1^{k-1}(-s_1)^k[(k-1)!\,k!]^{-1}e^{-y_1}dy_1+$$

$$+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\left\{it\eta y_2+\int_0^1\left[\int_0^\infty(m(0,t^2x^2(y_1-y_2),t,v)-1)x^{-2}dK(v,z,x)\right]dv\right\}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^\infty y_2^{l-1}(-s_2)^l[(l-1)!\,l!]^{-1}e^{-y_2}dy_2,\qquad(2)$$

где

$$m(s_1,s_2,t,z)=\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1e^{-s_1x+is_2y}dG(x,y,z,t),\ s_1\geqslant0,\ s_2\geqslant0.$$

Из [2, с. 419] получаем, что

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{(-s)^ky^{k-1}}{(k-1)!\,k!}=\frac{\partial}{\partial y}J_0(2\sqrt{sy})=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2\sqrt{sy}\sin u)\sqrt{\frac{s}{y}}\sin u\,du,\qquad(3)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, $sy\geqslant0$.

Из (2), учитывая (3), получаем

$$m(s_1+s_2,s_1-s_2,t,z)=1+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\left\{it\eta(y_1-y_2)+\int_0^1\left[\int_0^\infty(m(t^2x^2(y_1+y_2),\right.\right.$$

$$\left.\left.t^2x^2(y_1-y_2),t,v)-1)x^{-2}dK(v,z,x)\right]dv\right\}\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}J_0(2\sqrt{s_1y_1})J_0(2\sqrt{s_2y_2})\times$$

$$\times e^{-y_1-y_2}dy_1dy_2+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\left\{it\eta y_1+\int_0^1[(m(t^2x^2(y_1+y_2),0,t,v)-1)x^{-2}\times\right.$$

$$\left.\times dK(v,z,x)\right]dv\Big\}\frac{\partial}{\partial y_1}J_0(2\sqrt{s_1y_1})e^{-y_1}dy_1+\mathbf{M}\int_0^\infty\exp\Big\{it\eta y_2+$$

$$+\int_0^1\left[\int_0^\infty (m(0,\ t^2x^2(y_1-y_2),\ t,\ v)-1)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\right] dv\frac{\partial}{\partial y_2}\times$$
$$\times J_0(2\sqrt{s_2y_2})\, e^{-y_2}dy_2. \qquad (4)$$

Предположим, что существуют два решения уравнения (1) из класса L $G_1(x, y, z, t)$ и $G_2(x, y, z, t)$. Обозначим

$$m_p(s_1,\ s_2,\ t,\ z)=\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 e^{-s_1x+is_2y}dG_p(x,\ y,\ z,\ t),\ p=\overline{1,\ 2}.$$

Пусть $u(s_1, s_2, t, z)=|m_1(s_1, s_2, t, z)-m_2(s_1, s_2, t, z)|$. Из уравнения (4) для $u(s_1, s_2, t, z)$ имеем следующее неравенство:

$$u(s_1+s_2,\ s_1-s_2,\ t,\ z)\leqslant\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(t^2x^2(y_1+y_2),\ t^2x^2(y_1-y_2),\ t,\ v)\times$$
$$\times x^{-2}dK(v,\ z,\ x)(y_1y_2)^{-1/2}\, dve^{-y_1-y_2}dy_1dy_2\sqrt{s_1s_2}+c\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(t^2x^2(y_1+y_2),$$
$$0,\ t,\ v)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\, e^{-y_1}dy_1s_1+c\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(0,\ t^2x^2(y_1-y_2),\ t,\ v)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\times$$
$$\times e^{-y_2}dy_2s_2, \qquad (5)$$

где $c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 udu.$

Из неравенства (5) вытекает неравенство

$$\sup_{0\leqslant z\leqslant 1} u(s_1+s_2,\ s_1-s_2,\ t,\ z)\leqslant\sup_{0\leqslant z\leqslant 1}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(t^2x^2(y_1+y_2),\right.$$
$$t^2x^2(y_1-y_2),\ t,\ v)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\, dv\,(y_1y_2)^{-1/2}e^{-y_1-y_2}dy_1dy_2\sqrt{s_1s_2}+$$
$$+c\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(t^2x^2(y_1+y_2),\ 0,\ t,\ v)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\, e^{-y_1}dy_1s_1+$$
$$\left.+c\int_0^\infty\int_0^1\int_0^\infty u(0,\ t^2x^2(y_1-y_2),\ t,\ v)\, x^{-2}dK(v,\ z,\ x)\, e^{-y_2}dy_2s_2\right|(c't^2).$$

Применяя это неравенство n раз, получим, что при $|s_1|<C$, $|s_2|<C$, $C>0$ — произвольная постоянная, $\sup\limits_{0\leqslant z\leqslant 1} u(s_1+s_2, s_1-s_2, t, z)\leqslant(c't^2)^n c''$, где c' и c'' — некоторые постоянные. Полагая $t^2<1/c'$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем $u(s_1+s_2, s_1-s_2, t, z)\equiv 0$ при $t^2<1/c'$. Так как функция $m_1(s_1, s_2, t, z)-m_2(s_1, s_2, t, z)$ аналитическая по s_1, s_2 и $t\neq 0$, то она будет равна тождественно нулю на множестве $t\geqslant 0$, $s_1\geqslant 0$, $s_2\geqslant 0$. Отсюда вытекает, что решение уравнения (1) в классе функций L единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гирко В. Л. Случайные матрицы. Киев: Изд-во при Киев. ун-те, 1975.— 448 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.— 736 с.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 5.II 1979 г.

УДК 519.2

А. М. Захарин

Накопление прибыли в системе, описываемой сильно регенерирующим процессом

Пусть функционирование системы протекает в непрерывном времени $t \geqslant 0$ и описывается регенерирующим процессом ξ_t с произвольным пространством состояний X, в котором имеется регенерирующее состояние $x_0 \in X$, и пусть время пребывания в состоянии x_0 имеет показательное распределение.

Приведенное краткое описание полностью определяет дисциплину функционирования наиболее общей (с произвольной «фазой» и непрерывным временем) сильно регенерирующей системы, обладающей одним однородным марковским (сильно регенерирующим) состоянием [1, 2].

Пребывание системы в состоянии $x \in X$ оплачивается с интенсивностью $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — ограниченная измеримая функция, положительная лишь в однородном марковском состоянии, так что суммарная плата η_t за функционирование системы до момента $t \geqslant 0$ определяется формулой $\eta_t = \int\limits_0^t \varphi(\xi_u)\,du$ $(t \geqslant 0)$.

Важная в теоретическом и прикладном отношении задача исследования времени τ_z до момента накопления прибыли величины $z \geqslant 0$ в результате функционирования рассматриваемой системы была поставлена и решена в [1, 2].

Значительный теоретический и практический интерес представляют сильно регенерирующие системы, которые обобщают только что описанную, на случай, когда оплата пребывания в однородном марковском состоянии производится не с постоянной интенсивностью, а согласно однородному процессу с независимыми приращениями без положительных скачков. Будем считать, что различные периоды регенерации оплачиваются независимо друг от друга, что находится в соответствии со многими реальными ситуациями.

Для таких сильно регенерирующих систем справедливы аналоги соответствующих утверждений, характеризующих описанную выше систему.

Приведем один из результатов такого типа, сохранив для простоты все введенные выше обозначения и считая $\xi_0 = x_0$.

Т е о р е м а. *Процесс*

$$\tau_z = \begin{cases} \infty, & \sup\limits_{t\geqslant 0} \eta_t < z; \\ \inf\{t \geqslant 0 : \eta_t = z\}, & \sup\limits_{t\geqslant 0} \eta_t \geqslant z \quad (z \geqslant 0) \end{cases}$$

является монотонно возрастающим однородным процессом с независимыми приращениями, кумулянта которого $\rho = \rho(s) = -\dfrac{1}{z} \ln M \exp(-s\tau_z)$ $(s, z \geqslant 0)$ *представляет собой единственное (в классе ограниченных измеримых функций) решение уравнения* $\lambda + s - h(\rho) - \lambda M \exp(-\theta s - \eta\rho) = 0$ $(s \geqslant 0)$, *где через* $h(s)$ *обозначена кумулянта процесса оплаты пребывания в однородном марковском состоянии — однородного процесса с независимыми приращениями без положительных скачков;* λ *— параметр показательного времени* θ_0 *пребывания в однородном марковском состоянии (т. е. длительности прибыльно-убыточного подпериода);* θ *— длительность убыточного подпериода;* η *— абсолютная величина убытка за время* θ, *т. е.*

$$\theta = \inf\{u - \theta_0 : u > \theta_0,\ \xi_u = x_0\};\ \eta = -\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} \varphi(\xi_u)\,du.$$

Доказательство. Монотонность процесса τ_z очевидна. Доказательство того, что τ_z $(z \geqslant 0)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, основывается на стандартных рассуждениях, аналогичных проведенным в [1, 2]. После установления этого факта отпадает вопрос о существовании решения уравнения относительно кумулянты $\rho(s)$ процесса τ_z (поскольку τ_z — это реальный процесс). Единственность решения обосновывается стандартными рассуждениями с использованием вида кумулянты $h(s)$ процесса оплаты пребывания в однородном марковском состоянии $\zeta_0(t)$ $(t \geqslant 0;\ \zeta_0(0)=0)$ — однородного процесса с независимыми приращениями без положительных скачков [3].

Остановимся подробно на выводе приведенного в формулировке теоремы уравнения, поскольку при этом выводе используются некоторые нестандартные приемы.

Обозначим через τ_z^0 время достижения уровня $z \geqslant 0$ процессом $\zeta_0(t)$. Согласно формуле полной вероятности введенные величины удовлетворяют стохастическому соотношению $\tau_z = \tau_z^0 \delta\{\tau_z^0 \leqslant \theta_0\} + (\theta_0 + \theta + \tau'_{z-\zeta_0(\theta_0)+\eta}) \times \delta\{\tau_z^0 > \theta_0\}$, где $\delta(B)$ — индикатор случайного события B, а величины τ_z, τ'_z одинаково распределены и независимы. Переходя в полученном стохастическом соотношении к преобразованиям Лапласа, после элементарных преобразований с учетом введенных обозначений получаем

$$\exp(-z\rho(s)) - \exp(-z\rho_0(s+\lambda)) = \lambda M \int_0^{\tau_z^0} \exp(-(\lambda+s)u)\exp(-s\theta) \times$$

$$\times \exp(-(z-\zeta_0(u)+\eta)\rho(s))\,du,$$

где через $\rho_0(s)$ обозначена кумулянта процесса τ_z^0 $(z \geqslant 0)$. Обозначим левую часть полученного равенства через A_1, а правую — через A_2 и займемся ее преобразованием. Нетрудно убедиться, что

$$A_2 = \lambda M \exp(-\theta s - \eta\rho)\, M \int_0^{\tau_z^0} \exp\{-(\lambda+s)u - \rho[z-\zeta_0(u)]\}\,du.$$

Интеграл в правой части последнего соотношения удобно представить в виде разности двух интегралов, которые вычислим отдельно:

$$M \int_0^\infty \exp\{-(\lambda+s)u - \rho[z-\zeta_0(u)]\}\,du = \exp(-z\rho) \int_0^\infty \exp(-(\lambda+s)u) \times$$

$$\times M\exp(\rho\zeta_0(u))\,du = \exp(-z\rho) \int_0^\infty \exp\{-[\lambda+s-h(\rho)]u\}\,du =$$

$$= \exp(-z\rho)[\lambda+s-h(\rho)]^{-1}.$$

При вычислении второго интеграла будет использован тот факт, что из соотношения $\tau_z^0 = y$ следует равенство $\zeta_0(y) = z$:

$$M \int_{\tau_z^0}^\infty \exp\{-(\lambda+s)u - \rho[z-\zeta_0(u)]\}\,du = \int_0^\infty P\{\tau_z^0 \in dy\} \int_y^\infty \exp(-(\lambda+s)u) \times$$

$$\times M\exp\{-\rho[\zeta_0(y)-\zeta_0(u)]\}\,du = \int_0^\infty P\{\tau_z^0 \in dy\}\exp(-yh(\rho)) \times$$

$$\times \int_y^\infty \exp\{-u[\lambda+s-h(\rho)]\}\,du = [\lambda+s-h(\rho)]^{-1}\int_0^\infty \exp(-y(\lambda+s)) \times$$
$$\times P\{\tau_z^0 \in dy\} = [\lambda+s-h(\rho)]^{-1}\exp(-z\rho_0(\lambda+s)).$$

Теперь становится очевидным представление $A_2 = A_1\lambda M \exp(-\theta s - \eta\rho) \times \times [\lambda + s - h(\rho)]^{-1}$. Подставляя это выражение в равенство $A_1 = A_2$, после сокращения на $A_1 > 0$ получаем искомое уравнение.

Замечание 1. Приведенный вывод уравнения, существенно опирающийся на наличие марковского свойства времени пребывания в однородном марковском состоянии, дает основание считать целесообразным в некоторых случаях даже искусственное введение марковской (показательной или геометрической) случайной величины. Метод введения экспоненты был предложен и разработан И. И. Ежовым. Применение этого метода в ряде случаев уже привело к успеху [1, 2, 4].

Замечание 2. Как видно из доказательства, дисциплина накопления убытков в исследуемой системе может быть любой, поскольку определяющая формула для величины η при выводе основного уравнения нигде не использовалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бороздин О. П., Ежов И. И. Об одном классе граничных функционалов для сильно регенерирующих случайных процессов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 18.— с. 9—19.
2. Ежов И. И., Захарин А. М. Исследование сильно регенерирующих систем с доходами.— В кн.: Труды IV Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания (Баку, 1978). М., 1980, с. 9—18..
3. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.— 368 с.
4. Бороздин О. П. Об одном подходе к исследованию времени достижения уровня процессом с независимыми приращениями.— В кн.: Тезисы докладов Второй Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс. Т. I, 1977, с. 61—62.

Институт кибернетики АН УССР

Поступила в редакцию
12.VI 1979 г.