УДК 512.8

В. Р. Зелиско

О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей

Рассмотрим матричный многочлен

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, \ \det A(x) \not\equiv 0, \tag{1}$$

$s \geqslant 2$, A_i $(i = 0, 1, \dots, s)$ — квадратные матрицы n-го порядка с элементами из поля комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Исследуется вопрос о возможности представления $A(x)$ в виде

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2) \dots (Ex - B_m) F(x), \tag{2}$$

где E — единичная матрица порядка n, и в частности о разложении регулярного $A(x)$ в произведение линейных множителей.

Для матрицы $A(x)$ существуют обратимые над $\mathbf{C}[x]$ матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ такие, что

$$P(x) A(x) Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \tag{3}$$

где $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Матрицу $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ называют формой Смита матричного многочлена $A(x)$.

В дальнейшем будем использовать введенную П. С. Казимирским (см., например, [1]) матрицу значения полиномиальной матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена φ. Обозначим ее $M_{G(x)}(\varphi)$.

Теорема 1. *Для матричного многочлена* (1) *имеет место представление*

$$A(x) = B(x) C(x), \tag{4}$$

где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r ($r < s$) с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, *а $C(x)$ имеет форму Смита* $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, *причем*

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n), \tag{5}$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} M_{G_{r-1}(x)}(\varphi_n) = nr, \tag{6}$$

где $G_{r-1}(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right) P(x) \times \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|$, *а $P(x)$ — произвольная матрица из соотношения* (3).

Доказательство теоремы получаем, применяя предложение 4 из [1] к теореме 3 из [2].

Лемма. *Предположим, что форму Смита матричного многочлена $C(x)$ из соотношения* (4) *можно представить в виде* $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \operatorname{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, *где* $\mu_i \mid \mu_{i+1}$, $\nu_i \mid \nu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\sum_{i=1}^{n} \deg \mu_i = n$ *так, что*

$$\operatorname{rang} M_{G_r(x)}(\varphi_n \mu_n) = n(r+1), \tag{7}$$

где

$$G_r(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n \mu_n}{\varphi_1 \mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_n \mu_n}{\varphi_{n-1} \mu_{n-1}}, 1\right) P(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^r \|,$$

а $P(x)$ — произвольная матрица из соотношения (3). *Тогда для $A(x)$ существует разложение $A(x) = B(x)(Ex - D) N(x)$ такое, что формой Смита матрицы $Ex - D$ является матрица* $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Для доказательства леммы, учитывая теорему 1 при $r = 1$, достаточно показать, что

$$\operatorname{rang} M_{\operatorname{diag}\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}, 1\right) R(x)}(\mu_n) = n, \tag{8}$$

где $R(x)$ — произвольная обратимая над $\mathbf{C}[x]$ матрица из соотношения

$$R(x) C(x) S(x) = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n). \tag{9}$$

Применяя к матрицам $A(x)$ и $B(x)$ из соотношения (4) теорему 2 из [3], получаем равенство

$$SA(x) Q_1(x) = SB(x) Q_2(x) Q_2^{-1}(x) C(x) Q_1(x), \tag{10}$$

которое запишем в виде

$$T(x) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = T_1(x) \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) T_2(x) \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n), \tag{11}$$

где $T(x)$, $T_1(x)$ и $T_2(x)$ — нижние унитреугольные матрицы. Из последних двух равенств следует, что $T_2^{-1}(x) Q_2^{-1}(x) C(x) Q_1(x) = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

Допустим, что условие (8) при $R(x) = R_0(x)$, где $R_0(x) = T_2^{-1}(x) Q_2^{-1}(x)$, не выполняется. Тогда согласно [1] существует обратимая над $\mathbf{C}$ матрица

L такая, что в матрице $\mathrm{diag}\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}, 1\right) R_0(x) L$ некоторый столбец состоит из элементов, делящихся на μ_n. Покажем, что тогда найдется такая матрица $P_0(x)$ из соотношения (3) и обратимая над $\mathbf{C}$ матрица H, что в матрице

$$K(x) = \mathrm{diag}\left(\frac{\varphi_n\mu_n}{\varphi_1\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_n\mu_n}{\varphi_{n-1}\mu_{n-1}}, 1\right) P_0(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^r \| H \tag{12}$$

все элементы некоторого столбца будут делиться на $\varphi_n\mu_n$, что противоречило бы условию (7).

Пусть $B(x) = Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r$. Положим

$$H = \left\| \begin{matrix} E & & & & B_rL \\ & \cdot & & 0 & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & E & B_1L \\ 0 & & & & L \end{matrix} \right\|.$$

Сравнивая левые части равенств (10) и (11), получаем, что матрица $T^{-1}(x)S$ удовлетворяет соотношению (3). Обозначим ее через $P_0(x)$. Из тех же равенств (10) и (11) получаем

$$T(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = SB(x)\,Q_2(x)\,T_2(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n). \tag{13}$$

Поскольку $Q_2(x)\,T_2(x) = R_0^{-1}(x)$, то, разделив согласно соотношению (5) обе части равенства (13) на $\mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, получим $P_0^{-1}(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = B(x)\,R_0^{-1}(x)$. Отсюда

$$P_0(x)\,B(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,R_0(x). \tag{14}$$

Рассмотрим матрицу (12) при выбраных H и $P_0(x)$, обозначив для упрощения записи $\mathrm{diag}\left(\frac{\varphi_n\mu_n}{\varphi_1\mu_1}, \ldots, \frac{\varphi_n\mu_n}{\varphi_{n-1}\mu_{n-1}}, 1\right)$ через $\Phi(x)$. Тогда

$$\Phi(x)\,P_0(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^r \| H = \| \Phi(x)\,P_0(x),\ \Phi(x)\,P_0(x)\,x, \ldots$$
$$\ldots, \Phi(x)\,P_0(x)\,x^{r-1},\ \Phi(x)\,P_0(x)\,B(x)\,L \|.$$

Учитывая равенство (14), получаем

$$\Phi(x)\,P_0(x)\,B(x)\,L = \Phi(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,R_0(x)\,L =$$
$$= \varphi_n\,\mathrm{diag}\left(\frac{\mu_n}{\mu_1}, \ldots, \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}, 1\right) R_0(x)\,L.$$

Таким образом, в матрице $K(x)$ крайний правый блок содержит столбец, все элементы которого делятся на $\varphi_n\mu_n$. Лемма доказана.

Пусть форма Смита матрицы $A(x)$ представляется в виде $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{diag}(\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$, где $\varphi_j^{(i)} \mid \varphi_{j+1}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\deg(\varphi_1^{(i)} \ldots \varphi_n^{(i)}) = n$ для $i = 1, 2, \ldots, m\ (m \leqslant s)$.

Для каждого $r = 1, 2, \ldots, m$ построим матрицу

$$D_{r-1}(x) = \mathrm{diag}\left[\frac{\varphi_n^{(1)} \ldots \varphi_n^{(r)}}{\varphi_1^{(1)} \ldots \varphi_n^{(r)}}, \ldots, \frac{\varphi_n^{(1)} \ldots \varphi_n^{(r)}}{\varphi_{n-1}^{(1)} \ldots \varphi_{n-1}^{(r)}}, 1\right] P(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|. \tag{15}$$

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием представления матричного многочлена* (1) *в виде* (2), *где матрицы* $Ex - B_i$ $(i = 1, \ldots, m)$

имеют формы Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_n^{(i)})$, *а матрица* $F(x)$ *имеет форму Смита* $\prod_{i=m}^{s} \operatorname{diag}(\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_n^{(i)})$, *является выполнение равенств*

$$\operatorname{rang} M_{D_{r-1}(x)} [\varphi_n^{(1)} \dots \varphi_n^{(r)}] = nr \tag{16}$$

для всех $r = 1, \dots, m$, *где* $D_{r-1}(x)$ *имеет вид* (15).

Доказательство. Необходимость получается путем применения теоремы 1 к матрицам

$$\begin{gathered} Ex - B_1 \\ (Ex - B_1)(Ex - B_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (Ex - B_1)(Ex - B_2) \dots (Ex - B_m). \end{gathered}$$

Достаточность проведем индукцией по числу линейных множителей. Если выполняется условие (16) для $r = 1$, то согласно теореме 1 $A(x) = (Ex - B_1) C_1(x)$. Предположим, что $A(x) = (Ex - B_1) \dots (Ex - B_{m-1}) \times C_{m-1}(x)$. Поскольку имеет место равенство (16), при $r = m$, то мы вправе применить доказанную выше лемму, т. е. $A(x) = (Ex - B_1) \dots (Ex - B_{m-1}) \times (Ex - B_m) C_m(x)$. Таким образом, получено равенство (2), где $F(x) = C_m(x)$, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Непосредственным следствием теоремы 2 при $m = s - 1$ является следующий результат (в предположении, что $A(x)$ — регулярный).

Теорема 3. *Матричный многочлен* (1) *разложим в произведение линейных множителей* $A(x) = A_0 (Ex - B_1) \dots (Ex - B_s)$ *таких, что форма Смита* $A(x)$ *равна произведению форм Смита его сомножителей* $Ex - B_i$ $(i = 1, \dots, s)$ *тогда и только тогда, когда имеют место равенства* $\operatorname{rang} M_{D_{r-1}(x)} [\varphi_n^{(1)} \dots \varphi_n^{(r)}] = nr$ *для всех* $r = 1, 2, \dots, s - 1$, *где* $D_{r-1}(x)$ *имеет вид* (15).

Предположим, что матричный многочлен $A(x)$ унитальный, т. е., $A_0 = E$

Теорема 4. *Пусть для матричного многочлена* $A(x)$ *выполняются условия теоремы* 3. *Если для* $A(x)$ *имеются разложения*

$$A(x) = (Ex - B_1) \dots (Ex - B_s)$$

и

$$A(x) = (Ex - C_1) \dots (Ex - C_s)$$

такие, что формы Смита матриц $Ex - B_i$ *и* $Ex - C_i$ *совпадают для всех* $i = 1, 2, \dots, s$, *то* $B_i = C_i$, $i = 1, \dots, s$.

Доказательство легко провести индукцией по s, учитывая теорему 5 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Казімірський П. С. Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 5, с. 653—658.
2. Казімірський П. С., Зеліско В. Р. Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта.— У кн.: Теоретичні і прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К., 1977, с. 52—61.
3. Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць. — У кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К., 1977, с. 61—66.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
11.III 1979 г.