УДК 519.44

И. Д. Иванюта

Силовские p-подгруппы группы $GL(q)$

Как известно, для любого простого числа p силовские p-подгруппы конечной группы сопряжены и, тем более, изоморфны. Известно также, что для бесконечных групп это утверждение не имеет места: нетрудно указать бесконечную группу, в которой имеются неизоморфные между собой силовские p-подгруппы. Для таких групп естественно возникает задача охарактеризовать всевозможные неизоморфные силовские p-подгруппы. В настоящей работе она решается для случая предельной полной линейной группы $GL(q)$ над конечным полем $GF(q)$ из q элементов, когда p и q взаимно просты и $p > 2$. Группа $GL(q)$ является объединением бесконечной цепи полных линейных групп конечных степеней над полем $GF(q)$ $GL(1, q) \subset GL(2, q) \subset \subset \ldots \subset GL(n, q) \subset \ldots$ при отождествлении матрицы $a \in GL(n, q)$ с матрицей $\operatorname{diag}[a, 1] \in GL(n+1, q)$. Для всякого простого числа $p > 2$ удалось охарактеризовать все силовские p-подгруппы группы $GL(q)$. Оказалось, что силовские p-подгруппы группы $GL(q)$ устроены аналогично силовским p-подгруппам счетной симметрической группы, описанным в [1].

Каждая из них характеризуется некоторыми хорошо обозримыми инвариантами, а именно: некоторым целым p-адическим числом и некоторым конечным или счетным кардинальным числом.

Очень полезным для решения указанной задачи оказалось понятие сплетения линейной группы и групп подстановок [2]. Основную роль играют при этом сплетения циклической линейной группы порядка p^r для некоторого r и циклических групп подстановок порядка p.

1. Силовские p-подгруппы полной линейной группы $GL(n, q)$ степени n над конечным полем $GF(q)$ из q элементов при p взаимно простом с q и $p > 2$ изучены в [3]. Пусть l — наименьшее из чисел, такое что $q^l \equiv 1 \pmod{p}$, число r определяется из равенства $q^l - 1 = p^r m$, $(p, m) = 1$. Тогда циклическая подгруппа P_0 порядка p^r группы $GL(l, q)$ является в ней силовской p-подгруппой. Пусть $C = \langle c \rangle$ — циклическая группа порядка p симметрической группы S_p степени p. Группу C можно считать заданной регулярным представлением.

Обозначим через P_k сплетение группы P_0 и k экземпляров групп подстановок C, т. е. $P_k = (\dots(P_0 \wr C) \wr \dots \wr C)$ (определение сплетения линейной группы и группы подстановок см. в [2]). Силовские p-подгруппы группы $GL(n, q)$ строятся следующим образом. Предположим, что $n = \beta + l\alpha$ $(0 \leqslant \beta < l)$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_\nu p^\nu$ $(0 \leqslant \alpha_i \leqslant p-1)$. Тогда прямое произведение $\prod_{i=0}^{\nu} P_i^{\alpha_i}$ является силовской p-подгруппой группы $GL(n, q)$.

Группа P_k $(k = 1, 2, \dots)$ содержит прямое произведение $P_{k-1}^{(1)} \times \dots \times P_{k-1}^{(c^{p-1})}$ p экземпляров групп, подобных P_{k-1}. Отождествляя P_{k-1} с $P_{k-1}^{(1)}$, получим бесконечную возрастающую цепь подгрупп, $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_k \subset \dots$, объединение которой обозначим через P.

Группу P можно рассматривать как линейную группу бесконечномерного линейного пространства V над полем $GF(q)$. Из ее построения следует, что пространство V — прямая сумма l-мерных подпространств $V_l^{(i)}$, которые являются системами импримитивности группы P (системы импримитивности нулевой степени). Группа P содержит нормальную подгруппу $K_0 = \prod_{i=1}^{\infty} P_0^{(i)}$ — прямое произведение групп, подобных P_0, которая указанные системы импримитивности переводит в себя. K_0 назовем нулевой базой группы P. Фактор-группа P/K_0 подобна сплетению $\prod_{i=1}^{\infty} \wr\, C^{(i)}$, где $C^{(i)}$ подобна C. Далее, пространство V можно представить в виде прямой суммы lp-мерных подпространств $V_{lp}^{(i)}$, каждое из которых является прямой суммой p экземпляров указанных выше l-мерных подпространств, причем подпространства $V_{lp}^{(i)}$ являются системами импримитивности группы P (системы импримитивности первой ступени). Группа P содержит нормальную подгруппу $K_1 = \prod_{i=1}^{\infty} P_1^{(i)}$ — прямое произведение групп, подобных $P_1 = P_0 \wr C$, которая системы импримитивности первой ступени переводит в себя, K_1 назовем первой базой группы P.

Аналогично для областей импримитивности второй ступени и т. д. Очевидно $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

2. Переходим непосредственно к изучению силовских p-подгрупп группы $GL(q)$.

Лемма 1. *Группа P является силовской p-подгруппой группы $GL(q)$.*

Доказательство. Группы $GL(q)$ и P — объединения возрастающих цепей подгрупп $GL(l, q) \subset GL(lp, q) \subset \dots \subset GL(lp^n, q) \subset \dots$, $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$ соответственно. Так как P_n — силовская p-подгруппа $GL(lp^n, q)$, то P — силовская p-подгруппа $GL(q)$.

Силовские p-подгруппы группы $GL(q)$ можно строить следующим образом. Представим линейное пространство V в виде прямой суммы таких подпространств: β экземпляров одномерных подпространств, $0 \leqslant \beta < l$; α_i

экземпляров lp^i-мерных подпространств, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p-1$, $i = 1, 2, \dots$; не более чем счетное множество J бесконечномерных подпространств.

В полных линейных группах указанных lp^i-мерных подпространств выбираем силовские p-подгруппы (они подобны P_i). В полных линейных группах указанных бесконечномерных подпространств $V^{(j)}$, $j \in J$, выбираем силовские p-подгруппы $P^{(j)}$, подобные P.

Прямое произведение $Q = \prod_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i} \times \prod_{j \in J} P^{(j)}$ выбранных групп и будет силовской p-подгруппой группы $GL(q)$.

Действительно, группа Q является объединением возрастающей цепи подгрупп $P_0^{\alpha_0} \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^{(1)} \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^{\alpha_1} \times P_2^{(1)} \times P_3^{(2)} \subset \dots \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^{\alpha_1} \times \dots \dots \times P_n^{\alpha_n} \times P_{n+1}^{(1)} \times \dots \times P_{2n+1}^{(n+1)} \subset \dots$, где $P_k^{(j)} \subset P^{(j)} \subset GL(V^{(j)})$, которые являются силовскими p-подгруппами соответствующих полных линейных групп возрастающей цепи $GL(l\alpha_0, q) \subset GL(l\alpha_0 + lp, q) \subset GL(l\alpha_0 + lp\alpha_1 + lp^2 + lp^3, q) \subset \dots \subset GL(l\alpha_0 + lp\alpha_1 + \dots + lp^n\alpha_n + lp^{n+1} + \dots + lp^{2n+1}, q) \subset \dots$, объединение которой равно $GL(q)$.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть*

$$Q = \prod_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i} \times \prod_{j \in J} P^{(j)}, \tag{1}$$

где $P_i^{\alpha_i}$ — прямое произведение α_i экземпляров групп, подобных P_i, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p-1$, $i = 0, 1, 2, \dots$, для каждого $j \in J$ группа $P^{(j)}$ подобна P, множество J не более чем счетно, причем если $J = \varnothing$, то множество тех i, для которых $\alpha_i > 0$, бесконечно. Тогда Q является силовской p-подгруппой группы $GL(q)$.

3. Оказывается, что указанными в лемме 2 группами исчерпываются все силовские p-подгруппы группы $GL(q)$.

Теорема 1. *Пусть R — произвольная силовская p-подгруппа группы $GL(q)$. Тогда R имеет вид* (1).

Ради удобства изложения сделаем следующее замечание и введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассматривая $GF(q^l)$ как l-мерное векторное пространство V_l над полем $GF(q)$, получим естественное вложение мультипликативной группы поля $GF(q^l)$ в группу $GL(l, q)$ [3]. Следовательно, $GL(l, q)$ содержит циклическую подгруппу $\overline{C} = \langle a \rangle$ порядка $q^l - 1 = p^r m$, и элемент a перемещает все $q^l - 1$ ненулевые векторы пространства V_l одним циклом. Тогда $P_0 = \langle a^m \rangle$ — силовская p-подгруппа $GL(l, q)$, и элемент a^m является произведением m циклов длины p^r. Следовательно, всякий неединичный элемент p-подгруппы группы $GL(l, q)$ перемещает все ненулевые векторы пространства V_l и является произведением циклов одной и той же длины p^k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Под импримитивностью произвольной линейной группы G линейного пространства V будем понимать некоторую эквивалентность θ на V такую, что для $u, v \in V$ и $u \equiv v \pmod{\theta}$ имеем $ug \equiv vg \pmod{\theta}$ для всех $g \in G$. Соответствующие классы эквивалентности — это системы импримитивности группы G. Импримитивность группы G будем называть конечной и однородной, если все системы импримитивности — линейные подпространства пространства V одинаковой конечной размерности. Это число назовем рангом импримитивности. Будем говорить, что G действует на V эффективно, если каждый ненулевой вектор из V перемещается по крайней мере одним элементом из G.

Из строения силовских p-подгрупп группы $GL(n, q)$ следует такая лемма.

Лемма 3. *Если R — p-подгруппа группы $GL(n, q)$, действующая эффективно на пространстве V_n, то R обладает на V_n по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга l, где l —наименьшее из чисел, такое что $q^l \equiv 1 \pmod p$).*

Замечание. Аналогичное утверждение для R имеет место относительно множества систем импримитивности ранга l: группа R обладает по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга p на множестве систем импримитивности ранга l, которые R не оставляет на месте, и т. д.

Лемма 4. *Если R — некоторая p-подгруппа группы $GL(q)$, действующая эффективно на V, то она обладает на V по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга l.*

Доказательство. Пусть $\Phi = \{R_\alpha\}$ — множество всех конечных подгрупп группы R. Множество Φ частично упорядочено по включению: $R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Пусть T_α — подпространство V, на котором R_α действует эффективно. R_α обладает по крайней мере одной однородной импримитивностью ранга l на T_α. Пусть $A_\alpha = \{\theta_\alpha\}$ — всевозможные такие импримитивности R_α.

Рассмотрим R_α и R_β из Φ такие, что $R_\alpha \subset R_\beta$. Очевидно, $T_\alpha \subset T_\beta$. Отметим следующий важный факт. В импримитивности $\theta_\beta \in A_\beta$ группы R_β в одной системе не могут быть векторы из T_α и векторы, не лежащие в T_α, т. е. $u \not\equiv v \,(\mathrm{mod}\,\theta_\beta)$ для всех $\theta_\beta \in A_\beta$, если $u \in T_\alpha$, $v \notin T_\alpha$, $v \in T_\beta$, так как в противном случае элементы из R_α, оставляя на месте v, оставляли бы на месте u, что противоречит определению R_α. Действительно, любой элемент из R_α, переводя систему импримитивности в себя, либо все ее векторы оставляет на месте, либо все ненулевые векторы системы перемещает циклами длины p^k, $k \leqslant n$.

Совокупность систем импримитивности θ_β, состоящих из векторов T_α, обозначим θ_β^α.

Система Ψ конечных можеств $A_\alpha, A_\beta, \ldots$ станет частично упорядоченной, если положим $A_\alpha \leqslant A_\beta$ при $R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Для частичной упорядоченности системы Ψ имеем следующее.

1). Для любых двух множеств A_α и A_β из Ψ существует в Ψ такое A_γ, что $A_\alpha \leqslant A_\gamma$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$, так как для любых R_α и R_β из Φ существует такое R_γ из Ψ, что $R_\alpha \subseteq R_\gamma$, $R_\beta \subseteq R_\gamma$.

Если $A_\alpha \leqslant A_\beta$, то отображение $\varphi_{\beta\alpha}$ множества A_β в множество A_α — ограничение θ_β на множестве T_α, т. е. $\theta_\beta\varphi_{\beta\alpha} = \theta_\beta^\alpha$.

2). Если $A_\alpha \leqslant A_\beta$, $A_\beta \leqslant A_\gamma$, то $\theta_\gamma\varphi_{\gamma\alpha} = \theta_\gamma^\alpha$; $\theta_\gamma\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha} = \theta_\gamma^\alpha$.

3). $\theta_\alpha\varphi_{\alpha\alpha} = \theta_\alpha$.

Из этих условий видно, что в системе Ψ существует полное проекционное множество. Иными словами, в каждом из множеств A_α можно так выбрать по одной импримитивности, что любые две из них будут содержаться в некоторой третьей, являющейся общим прообразом первых двух.

Полное проекционное множество является импримитивностью группы R, поскольку $\bigcup\limits_\alpha R_\alpha = R$.

Замечание. Аналогично можно показать, что группа R обладает импримитивностью ранга p на множестве систем импримитивности ранга l, которые R не оставляет на месте, и т. д.

Доказательство теоремы 1. Пусть V_β — подпространство размерности β пространства V, векторы которого группа R оставляет на месте. Тогда $0 \leqslant \beta < l$. В самом деле, если $\beta \geqslant l$, то $R \subset P_0 \times R$, где P_0 — циклическая группа порядка p^r группы $GL(V_l)$, где $V_l \subseteq V_\beta$. Очевидно $P_0 \times R$ — p-группа, что противоречит силовости R.

Пусть M — множество систем импримитивности ранга l группы R. Если $R_0^{(i)}$ — линейная группа, индуцированная R на некоторой системе из M, то $R_0^{(i)} \subseteq P_0^{(i)}$, где $P_0^{(i)}$ подобна P_0. Множество M распадается на подмножества M_1 и M_2, где M_1 — совокупность систем, инвариантных относительно R, M_2 состоит из систем, которые перемещаются по меньшей мере одним $g \in R$.

Если α_0 — число систем в M_1, то $0 \leqslant \alpha < p$. В самом деле, если $\alpha_0 \geqslant p$, то над любыми p системами из M_1 можно построить цикл c, и тогда гр(R, c) будет, как легко видеть, p-подгруппой $GL(q)$, причем гр$(R, c) \supset R$, что противоречит силовости R.

На множестве M_2 группа R обладает по меньшей мере одной однородной импримитивностью ранга p.

Пусть $R_0^{\alpha_0}, R_0^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_0^{(i)}$ — прямые произведения групп, индуцированных на системах из M_1 и M_2 соответственно, $P_0^{\alpha_0}, P_0^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_0^{(i)}$ — прямые произведения соответствующих групп $P_0^{(i)} \cong P_0, R_0^{(i)} \leqslant P_0^{(i)}$.

Пусть, далее, N — множество систем k ступени группы R, $i = 1, 2, \ldots$. Если $R_k^{(i)}$ — линейная группа, индуцированная R на некоторой области из N, то $R_k^{(i)} \subseteq P_k^{(i)}$, где $P_k^{(i)}$ подобна P_k. Множество N распадается на подмножества N_1 и N_2, где N_1 — совокупность систем, инвариантных при действии R, N_2 состоит из систем, которые перемещаются по крайней мере одним $g \in R$.

Если α_k — число систем множества N_1, то, как и выше, можно показать, что $0 \leqslant \alpha_k < p$.

Пусть $R_k^{\alpha_k}$, $R_k^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_k^{(i)}$ — прямые произведения групп, индуцированных R на системах из N_1 и N_2 соответственно, $P_\kappa^{\alpha_k}$, $P_k^* = \prod\limits_{i=1}^{\infty} P_k^{(i)}$ — прямые произведения соответствующих групп $P_k^{(i)} \cong P_k$, $R_k^{(i)} \subseteq P_k^{(i)}$. Тогда получим

$$R_0^{\alpha_0} \subset R_0^{\alpha_0} \times R_1^* \subset R_0^{\alpha_0} \times R_1^{\alpha_1} \times R_2^* \subset \ldots \subset R_0^{\alpha_0} \times R_1^{\alpha_1} \times \ldots \times R_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \times R_n^* \subset \ldots, \quad (2)$$

$$P_0^{\alpha_0} \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^* \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^{\alpha_1} \times P_2^* \subset \ldots \subset P_0^{\alpha_0} \times P_1^{\alpha_1} \times \ldots \times P_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \times P_n^* \subset \ldots. \quad (3)$$

Пусть H и $\overline{H}$ — объединение цепей групп (2) и (3) соответственно. Очевидно, $R \subseteq H \subseteq \overline{H}$. Группа $\overline{H}$ содержит $\prod\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i}$. Пусть $\overline{H}$ действует эффективно на пространстве V, а группа $\prod\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i}$ — на пространстве V'. Если $V' = V$, то $\overline{H} = \prod\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i}$. Если же $V' \subset V$, то из определения группы $\overline{H}$ видно, что она содержит или подгруппу, подобную P, или подгруппу, подобную $\prod\limits_{j \in J} P^{(j)}$, где $P^{(j)}$ подобна P.

Итак, в общем случае $\overline{H} = \prod\limits_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i} \times \prod\limits_{j \in J} P^{(j)}$. В силу леммы 2 $\overline{H}$ является силовской p-подгруппой группы $GL(q)$. Из силовости R и $R \subseteq \overline{H}$ следует, что $R = \overline{H}$.

4. Теорема 2. *Пусть Q и R — силовские p-подгруппы группы $GL(q)$, причем*

$$Q = \prod_{i=0}^{\infty} P_i^{\alpha_i} \times \prod_{j \in J} P^{(j)}, \quad R = \prod_{i=0}^{\infty} P_i^{\beta_i} \times \prod_{k \in \Gamma} P^{(k)}.$$

Группы Q и R изоморфны тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и множества J и Γ равномощны.

Лемма 5. *Группа P неразложима в прямое произведение.*

Доказательство. Предположим $P = A \times B$. Поскольку $P = \bigcup\limits_n P_n$, то $A = \bigcup\limits_n (P_n \cap A)$, $B = \bigcup\limits_n (P_n \cap B)$. Для некоторого n $A_n = P_n \cap A \neq 1$, $B_n = P_n \cap B \neq 1$ и $A_n \times B_n \subseteq P_n$, причем $A_n, B_n, A_n \times B_n$ — нормальные подгруппы группы P_n. Как известно, $A_n \cap Z(P_n) \neq 1, B_n \cap Z(P_n) \neq 1$, где $Z(P_n)$ — центр группы P_n. Поскольку $Z(P_n)$ — циклическая группа порядка p^r (диагональ нулевой базы группы P_n), то отсюда следует, что $A_n \cap \cap B_n \neq 1$, а это невозможно.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и множества J и Γ равномощны. Тогда Q и R изоморфны естественным образом.

Обратно, пусть $Q \simeq R$. Рассмотрим коммутанты групп Q и R. Очевидно $P_0' = 1$, а при $n \geqslant 1$ $P_n' \supset Z(P_n)$. Следовательно, $P_0^{\alpha_0}$ и $P_0^{\beta_0}$ — наибольшие подгруппы центров групп Q и R, не содержащиеся в их коммутантах. Поскольку Q' отображается на R', а $Z(Q)$ — на $Z(R)$, то $P_0^{\alpha_0}$ отображается на $P_0^{\beta_0}$ и, значит, $\alpha_0 = \beta_0$. Рассмотрев фактор-группы Q/H_0 и R/L_0, где H_0 и L_0 — нулевые базы групп Q и R, аналогично можно показать, что $\alpha_1 = \beta_1$ и т. д. Отсюда следует, что $P_n^{\alpha_n}$ отображается на $P_n^{\beta_n}$, а $\prod\limits_{j \in J} P^{(j)}$ — на $\prod\limits_{k \in \Gamma} P^{(k)}$. Последние группы не имеют центров и, следовательно, обладают единственными прямыми разложениями с неразложимыми множителями $P^{(i)}$. Отсюда следует равномощность множеств J и Γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванюта И. Д. Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы.— Укр. мат. журн., 1963, **15**, № 3, с. 240—248.
2. Супруненко Д. А. Группы матриц.— М.: Наука, 1972.— 351 с.
3. Weir A. J. Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p.— Proc. Amer Math. Soc., 1955, **6**, N 4, с. 529—533.

Автомобильно-дорожный
институт

Поступила в редакцию
10.IV 1979 г.