УДК 517.929.517.934

Ле суан Кан

Квазипериодические колебания квазилинейных систем с автономным авторегулируемым запаздыванием

Настоящая работа посвящена установлению условия существования квазипериодических решений квазилинейных систем с автономным авторегулируемым запаздыванием, описывающих колебательные процессы, и их построению. Запаздывание называется автономным авторегулируемым, если оно зависит от фазовых координат и не зависит от времени. Предложение о зависимости запаздывания от искомой функции естественно для многих реальных систем [1, 2] Аналогичная задача для периодических решений указанной системы была рассмотрена в [3] и в частном случае в [4].

1. Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx(t - \Delta), \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, A, B — $n \times n$-мерные постоянные матрицы, $\Delta = \Delta_0 + \varepsilon f(x)$, причем $\Delta_0 > 0$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция в некоторой G переменных x, ε — малый параметр.

Допустим, что характеристическое уравнение порождающей системы

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = Ax^{(0)} + Bx^{(0)}(t - \Delta_0) \tag{2}$$

имеет простые корни вида $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, \ldots, m$), где λ_j рационально независимы, а остальные корни имеют достаточно большую по величине отрицательную вещественную часть. В этом случае система (2) допускает семейство квазипериодических решений вида

$$x^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(X^{(j)} e^{i(\lambda_j t + \alpha_j)} + \overline{X}^{(j)} e^{-i(\lambda_j t + \alpha_j)}\right), \tag{3}$$

где a_j, α_j ($j = 1, \ldots, m$) — произвольные постоянные, $X^{(j)}$ — собственный вектор, соответствующий корню $i\lambda_j$, $\overline{X}^{(j)}$ — вектор, комплексно сопряженный с $X^{(j)}$.

Сопряженной с (2) называется система

$$\frac{dy^{(0)}}{dt} + A'y^{(0)} + B'y^{(0)}(t + \Delta_0) = 0, \tag{4}$$

где A', B' — транспонированные к A, B матрицы. В этом случае система (4) допускает семейство квазипериодических решений

$$y^{(0)}(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \left(Y^{(j)} e^{-i(\lambda_j t + \beta_j)} + \overline{Y}^{(j)} e^{i(\lambda_j t + \beta_j)}\right), \tag{5}$$

где b_j, β_j — произвольные постоянные, $Y^{(j)}$ — собственный вектор, соответствующий корню $-\lambda_j$ и удовлетворяющий условию нормировки $X^{(j)} Y^{(j)} = 1$, $\overline{Y}^{(j)}$ — вектор, комплексно сопряженный с $Y^{(j)}$.

Наша задача — установить условия существования квазипериодических решений системы (1), соответствующих семейству (3), и построить их.

2. С (1) ассоциируем систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \psi}(\lambda + \varepsilon h) = Au + Bu_\Delta, \tag{6}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $h = (h_1, \ldots, h_m)$, $u = u(\psi)$, $u_\Delta = u(\psi - \lambda\Delta_0 - \varepsilon(h\Delta_0 + \lambda F + \varepsilon hF))$, $F = f(x)|_{x = u(\psi)}$, $h = h(\varepsilon)$ — постоянный вектор, подлежащий определению. Соответствующая порождающая система (6) имеет вид

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \psi} \lambda = Au^{(0)} + Bu^{(0)}_{\Delta_0}, \tag{7}$$

где $u^{(0)}_{\Delta_0} = u^{(0)}(\psi - \lambda\Delta_0)$.

По отношению к системе (6) имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $u(\psi, \varepsilon)$ — 2π-периодическое по ψ решение системы* (6), *то $x(t, \varepsilon) = u((\lambda + \varepsilon h)t + \alpha, \varepsilon)$ — квазипериодическое по t с частотным базисом $\lambda_1 + \varepsilon h_1, \ldots, \lambda_m + \varepsilon h_m$ решение системы* (1).

Доказательство очевидно. Пусть $u(\psi, \varepsilon)$ — периодическое решение системы (6), обращающееся при $\varepsilon = 0$ в периодическое решение $u^{(0)}(\psi) = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(0)} (X^{(j)} e^{i\psi_j} + \overline{X}^{(j)} e^{-i\psi_j})$ порождающей системы (7), $h^{(0)} = h(0)$. Получаем лемму.

Лемма 2. *Для того чтобы система* (6) *имела периодическое по* ψ *решение периода* 2π, *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$ia_j^{(0)} h_j^{(0)} (1 + \Delta_0 e^{-i\lambda_j \Delta_0} BX^{(j)} \cdot Y^{(j)}) + \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{K_m} B \frac{\partial u_{\Delta_0}^{(0)}}{\partial \psi} \lambda F^{(0)} \cdot Y^{(j)} e^{-i\psi_j} d\psi = 0 \tag{8}$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

где

$$F^{(0)} = F(u^{(0)}), \quad K_m = \{\psi : 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi\}.$$

Доказательство. Пусть система (6) допускает периодическое по ψ решение периода 2π $u^*(\psi\varepsilon)$. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} \lambda = Au + Bu_{\Delta_0} + B(u_\Delta^* - u_{\Delta_0}^*) - \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial \psi} h. \tag{9}$$

Эта система имеет, очевидно, решение $u^*(\psi, \varepsilon)$ и, следовательно, допускает периодическое решение. Тогда согласно работе [5] должны выполняться условия

$$\int_{K_m} \left(B(u_\Delta^* - u_{\Delta_0}^*) - \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial \psi} h \right) Y^{(j)} e^{-i\psi_j} d\psi = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 0$ и учитывая, что $u^*(\psi, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ обращается в $u^{(0)}(\psi)$, получаем равенства (8).

На основании лемм 1 и 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1) *имела квазипериодическое по* t *решение с частотным базисом* $\lambda_1 + \varepsilon h_1, \ldots, \lambda_m + \varepsilon h_m$, *необходимо, чтобы* $a_j^{(0)}$, $h_j^{(0)}$ *удовлетворяли равенствам*

$$ia_j^{(0)} h_j^{(0)} (1 + \Delta_0 e^{-i\lambda_j \Delta_0} BX^{(j)} Y^{(j)}) + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t B \frac{dx^{(0)}(t - \Delta_0)}{dt} f(x^{(0)}) y^{(j)} dt = 0 \tag{11}$$

$$(j = 1, \ldots, m),$$

где $y^{(j)}(t) = Y^{(j)} e^{-i(\lambda_j t + \beta_j)}$ — *периодические решения системы* (4).

Доказательство. На основании леммы 1 периодическим решением системы (6) $u(\psi, \varepsilon)$ соответствуют квазипериодические решения системы (1) $x(t, \varepsilon) = u((\lambda + \varepsilon h) t + \alpha, \varepsilon)$, а в силу леммы 2 и эквивалентности выражений (8) и (11) теорема справедлива. Равенства (11) записаны в комплексной форме. Отделяя в них вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений для определения величин $a_j^{(0)}$, $h_j^{(0)}$:

$$P_j^{(0)}(a_1^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}, h_1^{(0)}, \ldots, h_m^{(0)}) = 0, \quad Q_j^{(0)}(a_1^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}, h_1^{(0)}, \ldots h_m^{(0)}) = 0$$

$$(j = 1, \ldots, m). \tag{12}$$

Для установления условия существования периодических решений системы (6), согласно статье [6], рассматриваем вспомогательную систему

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} (\lambda + \varepsilon h) = Av + Bv_\Delta + \sum_{j=1}^{m} (W_j X^{(j)} e^{i\psi_j} + \overline{W}_j \overline{X}^{(j)} e^{-i\psi_j}),$$

$$W_j + \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{K_m}\left(B(v_\Delta - v_{\Delta_0}) - \varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial \psi}\,h\right)Y^{(j)}e^{-i\psi_j}\,d\psi = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{13}$$

где $\overline{W}_j$ — величина, комплексно сопряженная с W_j.

Имеет место теорема.

Теорема 2. *Система* (13) *всегда имеет периодическое по* ψ *решение периода* 2π, *зависящее от* $2m$ *произвольных постоянных* a_j, h_j $(j = 1, \ldots, m)$ *и малого параметра* ε, *которое при* $\varepsilon = 0$ *обращается в выражение*

$$v^{(0)} = \sum_{j=1}^{m} a_j\,(X^{(j)}e^{i\psi_j} + \overline{X}^{(j)}e^{-i\psi_j}).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем

$$v^{(0)} = \sum_{j=1}^{m} a_j\,(X^{(j)}e^{i\psi_j} + \overline{X}^{(j)}e^{-i\psi_j}), \qquad W_j^{(0)} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{14}$$

В качестве n-го приближения для решения системы (13) примем периодическое по ψ периода 2π решение системы

$$\frac{\partial v^{(n)}}{\partial \psi}\lambda = Av^{(n)} + Bv_{\Delta_0}^{(n)} + B\,(v_\Delta^{(n-1)} - v_{\Delta_0}^{(n-1)}) - \varepsilon\,\frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial \psi}\,h + $$
$$+ \sum_{j=1}^{m}(W_j^{(n)}X^{(j)}e^{i\psi_j} + \overline{W}_j^{(n)}\overline{X}^{(j)}e^{-i\psi_j}),$$

$$W_j^{(n)} + \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{K_m}\left(B\,(v_\Delta^{(n-1)} - v_{\Delta_0}^{(n-1)}) - \varepsilon\,\frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial \psi}\,h\right)Y^{(j)}e^{-i\psi_j}d\psi = 0 \quad (j=1, \ldots, m). \tag{15}$$

Производя оценки $v^{(n)} - v^{(0)}$, $W_j^{(n)}$, а также $v^{(n)} - v^{(n-1)}$, $W_j^{(n)} - W_j^{(n-1)}$, убеждаемся в том, что при достаточно малом ε и при a_j, h_j, ограниченных некоторыми константами, последовательности $\{v^{(n)}(\psi)\}$, $\{W_j^{(n)}\}$ равномерно сходятся к некоторым функциям $v(\psi, a_j, h_j, \varepsilon)$, $W_j(a_j, h_j, \varepsilon)$. Они непрерывно дифференцируемы по ε, и, кроме того, $v(\psi, a_j, h_j, \varepsilon)$ — непрерывно периодическая по ψ периода 2π. По отношению к системе (6) справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы система* (6) *имела периодическое по* ψ *периода* 2π *решение* $u(\psi, \varepsilon)$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в решение*

$$u^{(0)} = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(0)}\,(X^{(j)}e^{i\psi_j} + \overline{X}^{(j)}e^{-i\psi_j})$$

порождающей системы (7), *необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$P_j(a_1, \ldots, a_m, h_1, \ldots, h_m, \varepsilon) = 0, \qquad Q_j(a_1, \ldots, a_m, h_1, \ldots, h_m, \varepsilon) = 0$$
$$(j = 1, \ldots, m), \tag{16}$$

где $P_j = \operatorname{Re} W_j$, $Q_j = \operatorname{Im} W_j$, *допускала при достаточно малом* ε *решение* $a_j = a_j(\varepsilon)$, $h_j = h_j(\varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, m)$, *удовлетворяющее равенствам*

$$a_j(0) = a_j^{(0)}, \; h_j(0) = h_j^{(0)}, \tag{17}$$

где $a_j^{(0)}, h_j^{(0)}$ — *решение системы* (12).

В частности, при выполнении условия

$$\left.\frac{\partial (P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_m)}{\partial (a_1, \dots, a_m, h_1, \dots, h_m)}\right|_{a_j=a_j^{(0)}, h_j=h_j^{(0)}} \neq 0 \tag{18}$$

система (16) допускает единственное решение. Поэтому система (6) допускает единственное периодическое решение. Если же это условие не выполняется, то задача требует дополнительного анализа [7]. В случае аналитичности f периодическое решение системы (13) можно отыскивать в виде рядов

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v^{(n)} (\psi), \quad W_j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_j^{(n)} \quad (j = 1, \dots, m). \tag{19}$$

Подставляя ряды (19) в систему (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем линейные системы дифференциальных уравнений, определяющие величины $v^{(n)}(\psi)$, $W_j^{(n)}$:

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \psi} \lambda = Av^{(0)} + Bv^{(0)}_{\Delta_0}, \quad W_j^{(0)} = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \tag{20}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \psi} \lambda = Av^{(1)} + Bv^{(1)}_{\Delta_0} - B\frac{\partial v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)}) - \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \psi} h +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (W_j^{(1)} X^{(j)} e^{i\psi_j} + \overline{W}_j^{(1)} \overline{X}^{(j)} e^{-i\psi_j}),$$

$$W_j^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{K_m} \left(B\frac{\partial v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)}) + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \psi} h \right) Y^{(j)} e^{-i\psi_j} d\psi \quad (j=1, \dots, m), \tag{21}$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \psi} \lambda = Av^{(2)} + Bv^{(2)}_{\Delta_0} - B\frac{\partial v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (\lambda F^{(1)} + hF^{(0)}) - B\frac{\partial v^{(1)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi^2} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)})^2 - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \psi} h + \sum_{j=1}^{m} (W_j^{(2)} X^{(j)} e^{i\psi_j} + \overline{W}_j^{(2)} \overline{X}^{(j)} e^{-i\psi_j}), \tag{22}$$

$$W_j^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{K_m} \left[B\frac{\partial v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (\lambda F^{(1)} + hF^{(0)}) + B\frac{\partial v^{(1)}_{\Delta_0}}{\partial \psi} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 v^{(0)}_{\Delta_0}}{\partial \psi^2} (h\Delta_0 + \lambda F^{(0)})^2 + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \psi} h \right] Y^{(j)} e^{-i\psi_j} d\psi \quad (j = 1, \dots, m),$$

. . . .

Очевидно, что системы (20) — (22) допускают периодические по ψ периода 2π решения. Подставляя $v^{(n)}(\psi)$, $W_j^{(n)}$ $(j = 1, \dots, m)$, находящиеся из указанных систем, в (19), получим периодическое решение системы (13), представляющее в виде рядов по целым степеням ε и величины W_j. Отсюда, подставляя решения $a_j = a_j(\varepsilon)$, $h_j = h_j(\varepsilon)$ системы (16) и $\psi = (\lambda + \varepsilon h) t + \alpha$ в выражение $v(\psi, \varepsilon)$ (19), получим квазипериодическое по t решение с частотным базисом $\lambda_1 + \varepsilon h_1, \dots, \lambda_m + \varepsilon h_m$ исходной системы (1). Полученные результаты могут быть обобщены на систему вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx(t - \Delta) + \varepsilon F(x, x(t - \Delta), \varepsilon), \tag{23}$$

где $\Delta = \Delta_0 + \varepsilon f(x)$.

3. Как пример рассмотрим уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 3\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2x\,(t - \Delta) = 0, \tag{24}$$

где $\Delta = \varepsilon\,(\gamma - \beta x^2)$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$, ε — малый параметр.

Характеристическое уравнение порождающего уравнения для (24) имеет корни $\pm i$, $\pm i\sqrt{2}$. Поэтому решение порождающего уравнения таково:

$$x^{(0)} = a_1\,(e^{i(t+\alpha_1)} + e^{-i(t+\alpha_1)}) + a_2\,(e^{i(\sqrt{2}t+\alpha_2)} + e^{-i(\sqrt{2}t+\alpha_2)}), \tag{25}$$

где a_1, a_2, α_1, α_2 — произвольные постоянные.

С (24) ассоциируем уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}(1 + \varepsilon h_1) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}(\sqrt{2} + \varepsilon h_2)\right)^4 u + 3\left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}(1 + \varepsilon h_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\psi_2}(\sqrt{2} + \varepsilon h_2)\right)^2 u + 2u_\Delta = 0, \tag{26}$$

где $u_\Delta = u\,(\psi_1 - \varepsilon\,(1 + \varepsilon h_1)\,F,\ \psi_2 - \varepsilon\,(\sqrt{2} + \varepsilon h_2)\,F)$, $F = \gamma - \beta u^2$.

Вспомогательное уравнение будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}(1 + \varepsilon h_1) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}(\sqrt{2} + \varepsilon h_2)\right)^4 v + 3\left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}(1 + \varepsilon h_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\psi_2}(\sqrt{2} + \varepsilon h_2)\right)^2 v + 2v_\Delta = \sum_{j=1}^{2}(W_j e^{i\psi_j} + \overline{W}_j e^{-i\psi_j}),$$

$$W_j + \frac{\varepsilon}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\psi_1} + \frac{\partial v}{\partial\psi_2}\sqrt{2}\right)F - 3\,\frac{\partial^2 v}{\partial\psi_1^2}\,h_1 - 3\sqrt{2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\psi_2^2}\,h_2 - \right.$$
$$- 3\,\frac{\partial^2 v}{\partial\psi_1\partial\psi_2}(h_2 + h_1\sqrt{2}) - 2\,\frac{\partial^4 v}{\partial\psi_1^4}\,h_1 - 4\sqrt{2}\,\frac{\partial^4 v}{\partial\psi_2^4}\,h_2 - 2\,\frac{\partial^4 v}{\partial\psi_1^3\partial\psi_2}(3\sqrt{2}h_1 +$$
$$\left. + h_2) - 2\,\frac{\partial^4 v}{\partial\psi_1\partial\psi_2^3}(3\sqrt{2}h_1 + 6h_2) - 6\,\frac{\partial^4 v}{\partial\psi_1^2\partial\psi_2^2}(2h_1 + h_2\sqrt{2}) + \varepsilon\ldots\right]\times$$
$$\times e^{-i\psi_j}d\psi_1 d\psi_2 = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{27}$$

Применяя изложенный метод, из уравнения (27) получаем

$$v = 2a_1\cos\psi_1 + 2a_2\cos\psi_2 + \varepsilon\left[\frac{1}{14}\,\beta a_1^3\sin 3\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{68}\,\beta a_2^3\sin 3\psi_2 + \right.$$
$$+ \frac{-10 + 16\sqrt{2}}{103}\,\beta a_1^2 a_2\sin(2\psi_1 + \psi_2) - \frac{10 + 16\sqrt{2}}{103}\,\beta a_1^2 a_2\sin(2\psi_1 - \psi_2) +$$
$$+ \frac{-38 + 29\sqrt{2}}{34}\,\beta a_1 a_2^2\sin(\psi_1 + 2\psi_2) -$$
$$\left. - \frac{38 + 29\sqrt{2}}{34}\,\beta a_1 a_2^2\sin(\psi_1 - 2\psi_2)\right] + \varepsilon^2\ldots, \tag{28}$$

$$W_1 = 2a_1\,[h_1 - (\gamma - \beta\,(a_1^2 + 2a_2^2))\,i]\,\varepsilon + \varepsilon^2\ldots,$$

$$W_2 = 2\sqrt{2}a_2\,[3h_2 - (\gamma - \beta\,(2a_1^2 + a_2^2))\,i]\,\varepsilon + \varepsilon^2\ldots. \tag{29}$$

Приравнивая нулю правые части выражений (29), получаем уравнения, определяющие $a_j = a_j(\varepsilon)$, $h_j = h_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$. Подставляя полученные значения $a_j(\varepsilon)$, $h_j(\varepsilon)$ в (28), получаем периодическое решение уравнения (26). Подставляя, наконец, $\psi_1 = (1 + \varepsilon h_1)t + \alpha_1$, $\psi_2 = (\sqrt{2} + \varepsilon h_2)t + \alpha_2$ соответственно в (28), получаем искомое квазипериодическое решение уравнения (24), соответствующее решению (25).

В первом приближении квазипериодическое решение уравнения (24) имеет вид

$$x = 2\sqrt{\frac{\gamma}{3\beta}}\left\{\cos(t + \alpha_1) + \cos(\sqrt{2}t + \alpha_2) + \frac{\varepsilon\gamma}{6}\left[\frac{1}{14}\sin 3(t + \alpha_1) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{68}\sin 3(\sqrt{2}t + \alpha_2) + \frac{-10 + 16\sqrt{2}}{103}\sin((2 + \sqrt{2})t + 2\alpha_1 + \alpha_2) -$$

$$- \frac{10 + 16\sqrt{2}}{103}\sin((2 - \sqrt{2})t + 2\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{-38 + 29\sqrt{2}}{34}\sin((1 +$$

$$\left.\left. + 2\sqrt{2})t + \alpha_1 + 2\alpha_2) - \frac{38 + 29\sqrt{2}}{34}\sin((1 - 2\sqrt{2})t + \alpha_1 - 2\alpha_2)\right]\right\}, \quad (30)$$

где α_1, α_2 — произвольные постоянные.

Условие существования единственного решения рассмотренного уравнения в этом случае всегда удовлетворяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы.— М.—Л.: Гостехиздат, 1952.— 243 с.
2. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.— М.: Наука, 1965.— 354 с.
3. Гинзбург Р. Е. Колебания линейных систем с автономным авторегулируемым запаздыванием.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 7, с. 1257—1264.
4. Кореневский Д. Г. Автоколебательные режимы в системах с одной степенью свободы.— Прикл. механика, 1966, **2**, № 12, с. 119—122.
5. Halanay A. Quasi — periodic solutions for linear systems with time lags — Revue Roumanie de mathèmatiques pures et appliquées, 1969, **14**, N 10, p. 1463—1474.
6. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, **3**, № 3, с. 456—466.
7. Цой К., Шиманов С. Н. О периодических колебаниях квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, **10**, № 3, с. 345—352.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию 16.V 1980 г.