УДК 517.5

А. А. Лигун, В. Ф. Сторчай

О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами

Пусть L_p ($p \in [1, \infty)$) — пространство измеримых на $[0, 1]$ суммируемых в p-й степени функций $x(t)$ с нормой $\|x\|_p = \left\{\int_0^1 |x(t)|^p \mathrm{dt}\right\}^{\frac{1}{p}}$, L_∞ — пространство измеримых на $[0, 1]$ существенно ограниченных функций $x(t)$ с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$, C^r $(r = 0, 1, \ldots)$ — множество всех функций $x(t)$, имеющих на $[0, 1]$ r непрерывных производных, C^r_* $(r = 0, 1, \ldots)$ — множество всех функций $x \in C^r$, у которых $x^r(t) > 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, L^r_1 $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество всех функций $x(t)$, у которых $x^{(r-1)}(t)$ $(x^{(0)}(t) = x(t))$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $x^r(t) \in L_1$; W^r_p $(r = 1, 2, \ldots;$ $p \in [1, \infty))$ — множество всех функций $x(t)$, у которых $x^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $x^r \in L_p$ и $\|x^{(r)}\|_p \leqslant 1$.

Пусть, далее, $\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$, $h_{i,n} = t_{i,n} - t_{i-1,n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $h_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_{i,n}$, а $\delta_\mu = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\mu = 1\}$ — фиксированное разбиение отрезка $[0, 1]$ такое, что $\tau_j = 1 - \tau_{\mu-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, \mu)$.

Обозначим через $\Delta_{n,\mu}$ разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i-1,n} + (t_{i,n} - t_{i-1,n})\ \tau_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, \mu)$. Положим для $r = 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots, r$, $\mu = \mu_{r,k} = |r + 1 - 2k| + 1$.

При $k \leqslant 2^{-1}(r+1)$ для функции $x \in C^{r-k}$ интерполяционным эрмитовым локальным сплайном порядка r дефекта k будем называть функцию $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) \in C^{r-k}$, однозначно определяющуюся условиями:

1) на каждом из интервалов $(t_{i,j-1,n},\ t_{i,j,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \mu)$ она является алгебраическим многочленом степени не выше r;

2) на каждом из интервалов $(t_{i-1,n},\ t_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сплайн $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)$ имеет $r - 1$ непрерывных производных;

3) $S^{(\nu)}_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t_{i,n}) = x^{(\nu)}(t_{i,n})$ $(\nu = 0, 1, \ldots, r - k)$.

При $k \geqslant 2^{-1}(r+1)$ для функции $x \in C^{r-k}$ интерполяционным локальным эрмитовым сплайном порядка r дефекта k будем называть функцию $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) \in C^{r-k}$, однозначно определяющуюся условиями:

1) на каждом из интервалов $(t_{i-1,n},\ t_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ она является алгебраическим многочленом степени не выше r;

2) $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t_{i,j,n}) = x(t_{i,j,n})$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, \mu)$;

3) $S^{(\nu)}_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t_{i,n}) = x^{(\nu)}(t_{i,n})$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, \ldots r - k)$.

Существование и единственность сплайнов $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)$ доказаны в работах [1 и 2], а в работах [1 и 3] получены точные уклонения этих сплайнов на некоторых классах функций и приведен библиографический обзор.

При некоторых r и k задача об оптимальном выборе узлов при интерполировании функции $x(t)$ сплайнами $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)$ рассматривалась в работах [4 — 6].

Обозначим через $S_r(\delta_\mu)$ множество всех сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $\{\tau_j\}_{j=0}^{\mu}$, т. е. множество всех $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, являющихся алгебраическими многочленами степени не выше r на каждом из интервалов (τ_{j-1}, τ_j) $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$.

Для $k \leqslant 2^{-1}(r+1)$ при любом $\nu = 0, 1, \ldots, r - k$ существует единственная функция $H_{r,k,\nu} \in S_r(\delta_\mu)$ такая, что

$$H^{(l)}_{r,k,\nu}(0) = \delta_{l,\nu} \qquad (l, \nu = 0, 1, \ldots, r - k);$$
$$H^{(l)}_{r,k,\nu}(1) = 0 \qquad (l, \nu = 0, 1, \ldots, r - k), \tag{1}$$

где

$$\delta_{l,\nu} = \begin{cases} 1, & l = \nu, \\ 0, & l \neq \nu \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для $k \leqslant 2^{-1}(r+1)$ при $t \in (t_{i-1,n},\ t_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сплайн $S_{r,k}(x,\ \Delta_{n,\mu};\ t)$ можно представить в виде

$$S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)=\sum_{\nu=0}^{r-k} h_{i,n}^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i-1,n})\, H_{r,k,\nu}\left(\frac{t-t_{i-1,n}}{h_{i,n}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r-k}(-h_{i,n})^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i,n})\, H_{r,k,\nu}\left(\frac{t_{i,n}-t}{h_{i,n}}\right). \tag{2}$$

При $k\geqslant 2^{-1}(r+1)$ обозначим через $H_{r,k,\nu}$ $(\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ r-k)$ алгебраический многочлен степени r, удовлетворяющий условиям

$$H_{r,k,\nu}(\tau_j)=0,\ H_{r,k,\nu}^{(l)}(0)=\delta_{l,\nu},\ H_{r,k,\nu}^{(l)}(1)=0$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1,\ l,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ r-k), \tag{3}$$

а через $P_{r,k,m}(t)$ $(m=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1)$ — алгебраический многочлен степени r, удовлетворяющий условиям

$$P_{r,k,m}(\tau_j)=\delta_{j,\mu},\ P_{r,k,m}^{(l)}(0)=0,\ P_{r,k,m}^{(l)}(1)=0$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1;\quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ r-k). \tag{4}$$

Ясно, что для $k\geqslant 2^{-1}(r+1)$ при $t\in(t_{i-1,n},\ t_{i,n})$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ сплайн $S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)$ можно представить в виде

$$S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t)=\sum_{\nu=0}^{r-k} h_{i,n}^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i-1,n})\, H_{r,k,\nu}\left(\frac{t-t_{i-1,n}}{h_{i,n}}\right)+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r-k}(-h_{i,n})^{\nu} x^{(\nu)}(t_{i,n})\, H_{r,k,\nu}\left(\frac{t_{i,n}-t}{h_{i,n}}\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\mu-1} x(t_{i,m,n})\, P_{r,k,m}\left(\frac{t-t_{i-1,n}}{h_{i,n}}\right). \tag{5}$$

Положим

$$\omega_{r,k}(\delta_\mu;\ t)=\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}-S_{r,k}(\delta_\mu;\ t)=\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}-S_{r,k}\left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!};\ \Delta_{1,\mu};\ t\right),$$

где $S_{r,k}(\delta_\mu;\ t)$ — сплайн из $S_r(\delta_\mu)$ такой, что

$$S_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ 0)=0,\quad S_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ 1)=\frac{1}{(r+1-\nu)!}\qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ r-k).$$

При $k\geqslant 2^{-1}(r+1)$ функция $\omega_{r,k}(\delta_\mu;\ t)$ легко выписывается явно. Действительно, в этом случае $S_{r,k}(\delta_\mu;\ t)$ — алгебраический многочлен степени r, $r-k+1$ раз интерполирующий функцию $\dfrac{t^{r+1}}{(r+1)!}$ в точках $t=0$ и $t=1$ и по одному разу в точках τ_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1)$. Поэтому

$$\omega_{r,k}(\delta_\mu;\ t)=\frac{1}{(r+1)!}\{(1-t)\,t\}^{r-k+1}\prod_{y=1}^{\mu-1}(t-\tau_j).$$

В работе [1] доказано, что при всех $r = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, r$ для любых функций $x, y \in L_1^{r+1}$ справедливо равенство

$$\int_0^1 \{x(u) - S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, y^{(r+1)}(u)\, du =$$

$$= (-1)^{r+1} \int_0^1 \{y(u) - S_{r,r-k+1}(y;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, x^{(r+1)}(u)\, du. \qquad (6)$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\int_0^1 \{x(u) - S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, dy^{(r)}(u) =$$

$$= (-1)^{r+1} \int_0^1 \{y(u) - S_{r,r-k+1}(y;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, dx^{(r)}(u). \qquad (7)$$

Учитывая, что какова бы ни была абсолютно непрерывная функция $x(t)$ и функция ограниченной вариации $y(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется абсолютно непрерывная функция $y_\varepsilon(t)$ такая, что

$$\left| \int_0^1 x(t)\, d(y - y_\varepsilon) \right| < \varepsilon,$$

приходим к выводу, что равенство (7) справедливо для любых функций $x(t)$ и $y(t)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а r-я — функция ограниченной вариации.

Пусть t — фиксированная точка из промежутка $[0, 1]$ и для $r = 0, 1, \ldots$

$$(u-t)_+^r = \begin{cases} (u-t)^r & (u \geqslant t), \\ 0 & (u < t). \end{cases}$$

Полагая в (7) $y(u) = (-1)^r \dfrac{(u-t)_+^r}{r!}$, получаем

$$x(t) - S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) = \int_0^1 \{x(u) - S_{r,k}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, d(u-t)_+^0 =$$

$$= -\frac{1}{r!} \int_0^1 \{(u-t)_+^r - S_{r,r-k+1}((\cdot - t)_+^r;\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, dx^{(r)}(u) \qquad (8)$$

для любой функции $x \in L_1^{r+1}$.

Из равенств (2) и (5) следует, что

$$\frac{\partial}{dt}\{z(u-t) - S_{r,k}(z(\cdot - t);\ \Delta_{n,\mu};\ u)\} = -\{z'(u-t) - S_{r,k}(z'(\cdot - t);\ \Delta_{n,\mu};\ u).$$

Отсюда и из (8) вытекает, что при $\nu = 1, 2, \ldots, r-k$

$$x^{(\nu)}(t) - S_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu+1}}{(r-\nu)!} \int_0^1 \{(u-t)_+^{r-\nu} - S_{r,r-k+1}((\cdot - t)_+^{r-\nu};\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}\, x^{(r+1)}(u)\, du \qquad (9)$$

для любой функции $x \in L_1^{r+1}$.

Положим для $\nu = 0, 1, \ldots$

$$e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) = x^{(\nu)}(t) - S_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t),$$

$$D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{(r-\nu)!}\{(u-t)_+^{r-\nu} - S_{r,r-k+1}((\cdot - t)^{r-\nu};\ \Delta_{n,\mu};\ u)\}. \quad (10)$$

Тогда, если $t \in [t_{i-1,n},\ t_{i,n}]$, то

$$D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u) \equiv 0 \quad (11)$$

для $u \bar{\in} [t_{i-1,n},\ t_{i,n}]$.

Из равенств (8) — (11) следует, что для любой функции $x \in C_*^{r+1}$

$$e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) = \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)\, x^{(r+1)}(u)\, \mathrm{du}. \quad (12)$$

Пусть $\omega(z;\ \delta) = \sup\limits_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} |z(t_1) - z(t_2)|$ — модуль непрерывности функции $z(t)$, а точка $\zeta_{i,n} = \zeta_{i,n}(x;\ r,\ p)$ такова, что

$$\int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\, \mathrm{dt} = x_{p,r,\nu}(\zeta_{i,n})\, h_{i,n}, \quad (13)$$

где

$$x_{p,r,\nu}(t) = (x^{(r+1)}(t))^{\frac{1}{r-\nu+1+p^{-1}}} \quad (\infty^{-1} = 0). \quad (14)$$

Тогда из равенства (12) получим

$$e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) = \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)\, x^{(r+1)}(\zeta_{i,n})\, \mathrm{du} +$$

$$+ \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)\, \{x^{(r+1)}(u) - x^{(r+1)}(\zeta_{i,n})\}\, \mathrm{du} =$$

$$= x^{(r+1)}(\zeta_{i,n}) \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)\, \mathrm{du} +$$

$$+ \theta_{i,n}\, \omega(x^{(r+1)};\ h_n) \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)|\, \mathrm{du}, \quad (15)$$

где $\theta_{i,n} = \theta_{i,n}(x,\ \zeta_{i,n},\ p,\ r,\ \nu,\ k)$, $|\theta_{i,n}| \leqslant 1$. Полагая в (12) $x(t) = \dfrac{t^{r+1}}{(r+1)!}$, для $t \in [t_{i-1,n},\ t_{i,n}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получаем

$$\int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)\, \mathrm{du} = \frac{1}{(r+1)!}\, e_{r,k}^{(\nu)}((\cdot)^{r+1};\ \Delta_{n,\mu};\ t) =$$

$$= h_{i,n}^{r+1-\nu}\, \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ h_{i,n}^{-1}(t - t_{i-1,n})). \quad (16)$$

Кроме того, из (10) следует, что

$$\int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)|\, \mathrm{du} = \frac{h_{i,n}^{r+1-\nu}}{(r-\nu)!} = \int\limits_0^1 |(u-r)^{r-\nu} - S_{r,r-k+1}((\cdot - r)^{r-\nu};$$

$$\Delta_{1,\mu};\ t)|\, \mathrm{dt},$$

где $\tau = h_{i,n}^{-1}(t - t_{i-1,n})$. Поэтому, полагая

$$c_{r,\nu}(\Delta_\mu) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \frac{1}{(r-\nu)!} \int_0^1 |(u-\tau)^{r-\nu} - S_{r,r-k+1}((\cdot - \tau)^{r-\nu};\ \Delta_{1,\mu};\ t)|\,\mathrm{d}t,$$

имеем

$$\max_{t_{i-1,n} \leqslant t \leqslant t_{i,n}} \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |D_{r,k,\nu}(\Delta_{n,\mu};\ t,\ u)|\,\mathrm{d}u = h_{i,n}^{r+1-\nu} c_{r,\nu}(\Delta_\mu). \tag{17}$$

Замечание. Отметим, что из равенств (12) и (17) вытекает соотношение

$$\sup_{x \in W_\infty^r} \| x^{(\nu)}(t) - S_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) \|_{L_p} \leqslant c_{r,\nu}(\Delta_\mu) \left(\sum_{i=1}^n h_{i,n}^{(r+1-\nu)p+1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя соотношения (16), (17), (13) и (14) в (15), приходим к равенству

$$e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu};\ t) = x^{(r+1)}(\zeta_{i,n})\, h_{i,n}^{r+1-\nu} \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ h_{i,n}^{-1}(t - t_{i-1,n})) +$$
$$+ \theta_{i,n} h_{i,n}^{r+1-\nu} c_{r,\nu}(\Delta_\mu)\, \omega(x^{(r+1)};\ h_n) =$$
$$= h_{i,n}^{\nu - r - \frac{1}{p} - 1} \left(\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\,\mathrm{d}t \right)^{r+1-\nu+p^{-1}} h_{i,n}^{r+1-\nu} \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ h_{i,n}^{-1}(t - t_{i-1,n})) +$$
$$+ \theta_{i,n} h_{i,n}^{r+1-\nu} c_{r,\nu}(\Delta_\mu)\, \omega(x^{(r+1)};\ h_n) = \theta_{i,n} h_{i,n}^{r+1-\nu} c_{r,\nu}(\Delta_\mu)\, \omega(x^{(r+1)};\ h_n) +$$
$$+ \left(\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\,\mathrm{d}t \right)^{r+1-\nu+p^{-1}} h_{i,n}^{-\frac{1}{p}} \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu;\ h_{i,n}^{-1}(t - t_{i-1,n})). \tag{18}$$

Так как $x \in C_*^{r+1}$, то из равенства (13) следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, то равномерно по i $h_{i,n} = O\left(\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\,\mathrm{d}t \right)$. Следовательно,

$$\| e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu}) \|_p^p = \| \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu) \|_p^p \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\,\mathrm{d}t \right)^{(r+1-\nu)p+1} +$$
$$+ O(h_{i,n}^{(r+1-\nu)p+1} \omega(x^{(r+1)};\ h_n)).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $k = 1, 2, \ldots r$, $\nu = 0, 1, \ldots, r-k$ *и* $n \to \infty$. *Тогда для любой функции* $x \in C_*^{r+1}$ *имеет место соотношение*

$$\| e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu}) \|_p = \| \omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu) \|_p \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} x_{p,r,\nu}(t)\,\mathrm{d}t \right)^{(r+1-\nu)p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times \{1 + O(\omega(x^{(r+1)};\ h_n))\}.$$

Положим $\mathscr{E}_n^{r,k,\nu}(x;\ \delta_\mu) = \inf\limits_{\Delta_n} \| e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu}) \|_p$. Последовательность разбиений $\Delta_n^* = \Delta_n^*(p)$ будем называть асимптотически наилучшей для функции $x(t)$, если при $n \to \infty$ $\mathscr{E}_n^{r,k,\nu}(x;\ \delta_\mu)_p = \| e_{r,k}^{(\nu)}(x;\ \Delta_{n,\mu}) \|_p (1 + o(1))$. Положим $h_{i,n}^* = x_{i,n}^* - x_{i-1,n}^*$, $h_n^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_{i,n}$.

Методом неопределенных множителей Лагранжа легко доказывается справедливость следующего утверждения

Лемма 2. *Для любых* $n=1, 2, \ldots$ *и* $\alpha>1$ *при условии* $C_k \geqslant 0$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} C_k = C$ *имеют место соотношения*

$$\min_{C_k} \sum_{k=1}^{n} C_k^{\alpha} = \frac{C^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}, \quad \min_{C_k} \max_{1\leqslant k\leqslant n} C_k^{\alpha} = \frac{C^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

причем минимум левых частей достигается при $C_k = \frac{C}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Если последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ асимптотически наилучшая для функции $x(t)$, то $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Учитывая этот факт и сопоставляя утверждения лемм 1 и 2, получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть* $p \in [1, \infty]$, $r=1, 2, \ldots$; $k=1, 2, \ldots, r$, $\nu = 0, 1, \ldots r-k$ *и* $n\to\infty$. *Тогда для любой функции* $x \in C_*^{r+1}$

$$\mathscr{E}_n^{r,k,\nu}(x; \delta_\mu)_p = \frac{\|\omega_{r,k}^{(\nu)}(\delta_\mu)\|_p}{n^{r+1}} \left(\int_0^1 (x^{(r+1)}(t))^{\frac{1}{r+1-\nu+p^{-1}}} dt \right)^{r+1-\nu+p^{-1}} + o(n^{-(r+1)}),$$

причем асимптотически наилучшее расположение узлов $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^{n}$ *определяется из равенств*

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (x^{(r+1)}(t))^{\frac{1}{r+1-\nu+p^{-1}}} dt = \frac{i}{n} \int_0^1 (x^{(r+1)}(t))^{\frac{1}{r+1-\nu+p^{-1}}} dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лигун А. А. Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 507—514.
2. Пахнутов И. А. Лакунарные сплайны с дополнительными узлами.— Методы сплайн-функций: Вычислительные системы. Новосибирск, 1979, вып. 81, с. 21—30.
3. Великин В. Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, 37, N 1, с. 165—185.
4. Лигун А. А., Сторчай В. Ф. О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами.— Analysis Mathematica, 1976, 2, № 4, с. 267—275.
5. Малышева А. Д. О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций четными эрмитовыми сплайнами.— В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, 1977, с. 25—30.
6. Гребенников А. И. О выборе узлов при интерполировании функций L-сплайнами.— Вычислительные методы и программирование. М., 1977, вып. 26, с. 168—175.

Днепродзержинский индустриальный институт
Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию 18.V 1978 г.;
после переработки — 5.XI 1979 г.