УДК 517.537

Ю. И. Мельник

О рядах Дирихле функций, регулярных в выпуклых многоугольниках

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$ $(N \geqslant 3)$, M — открытая часть $\overline{M}$ и $C = \overline{M} \setminus M$ — граница $\overline{M}$. Предполагаем, что начало координат принадлежит M. Через $E_p = E_p(M)$ обозначим класс регулярных в M функций $f(z)$ таких, что $\sup\limits_n \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| \right\} < \infty$, где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — некоторая последовательность спрямляемых контуров, расположенных внутри M и стремящихся к C. Известно (см., например, [1]), что каждая функция $f(z) \in E_p$ имеет почти всюду на C граничные значения, определяющие функцию, интегрируемую по модулю в p-й степени на C. В пространстве E_p вводится норма по формуле $\|f\|_p = \|f\|_{E_p} = \left\{ \int\limits_C |f(z)|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$, после чего оно становится банаховым. Пусть $\mathfrak{L}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} e^{a_k \lambda}$, $\{\lambda_m\}_1^\infty$ — упорядоченное по возрастанию модулей множество нулей функции $\mathfrak{L}(\lambda)$ (для простоты предполагается, что все нули $\mathfrak{L}(\lambda)$ простые) и $f(z) \in E_p(M)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда (см. [2])

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_f(\lambda_m) \frac{e^{\lambda_m z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_m)} \quad (z \in M), \tag{1}$$

где

$$\omega_f(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\frac{2}{r+1}}} \left\{ \int\limits_0^t f(r(t-\eta)) e^{\zeta \eta} d\eta \right\} \gamma(t)\, dt, \tag{2}$$

$\gamma(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{t - a_k}$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\mathfrak{L}(\lambda)$, $\Gamma_R = \{\zeta_R : \zeta_R = R\zeta,\ \zeta \in C\}$ $(R > 0)$. Ряд (1) сходится абсолютно в M и равномерно на компактах внутри M.

Коэффициенты ряда (1), определяемые по формуле (2), будем называть коэффициентами Леонтьева функции $f(z)$. Известно (см. [3]), что $\omega_f(\lambda_m) \to 0$ $(m \to \infty)$ для любой функции $f(z) \in E_1$.

В данной работе некоторые классические результаты из теории рядов Фурье переносятся на ряды Дирихле (1).

Постоянные, различные в разных выражениях и зависящие только от параметра p $(q, \ldots)$, будем обозначать одним символом A_p $(A_q, \ldots)$.

2. Теорема 1 (соответствующая теорема для рядов Фурье приведена в [4, т. 1, с. 423]). *Пусть $f(z) \in E_p(M)$, $1 < p < \infty$. Тогда ряд Дирихле* (1) *сходится* (*к* $f(z)$) *в метрике* E_p*.

Теорема 2 (аналог теоремы Хаусдорфа — Юнга [4, т. 2, с. 153]).

* Иным способом этот результат установлен в работе [5].

I. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $f(z)\in E_p$ *и* $\omega_f(\lambda_m)$ — *коэффициенты Леонтьева функции* $f(z)$. *Тогда* $\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_f(\lambda_m)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant A_p\|f\|_p$ (*здесь и далее* $q=p/(p-1)$).

II. *Пусть* $1<p\leqslant 2$ *и* ω_m $(m=1,2,\ldots)$ *такие числа, что* $\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^p<\infty$. *Тогда* ω_m — *коэффициенты Леонтьева некоторой функции* $f(z)\in E_q$ *и* $\|f\|_q\leqslant A_p\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$.

Теорема 3 (аналог теоремы Харди — Литтлвуда [4, т. 2, с. 165]). I. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $f(z)\in E_p$ *и* $\omega_f(\lambda_m)$ — *коэффициенты Леонтьева функции* $f(z)$. *Тогда*

$$\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_f(\lambda_m)|^p m^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant A_p\|f\|_p.$$

II. *Пусть* $q\geqslant 2$ *и* ω_m $(m-1,2,\ldots)$ *такие числа, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^q m^{q-2}<\infty.$$

Тогда ω_m — *коэффициенты Леонтьева некоторой функции* $f(z)\in E_q$ *и*

$$\|f\|_q\leqslant A_q\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^q m^{q-2}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Более слабые варианты теорем 1 — 3 содержатся в работах [2, 3].

3. Для доказательства теорем 1 — 3 потребуются следующие факты (см. [2,6]):

A) найдется такое число $\Lambda>0$, что при $|\lambda|>\Lambda$ все нули $\mathfrak{L}(\lambda)$ будут расположены в точках λ_n^j $(j=1,2,\ldots,N;\ n=1,2,\ldots)$, для которых

$$|\lambda_n^j-\overset{0}{\lambda}{}_n^j|\leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-cn},\quad \overset{0}{\lambda}{}_n^j=\frac{(2n-1)\pi}{i(a_j-a_{j+1})},\quad 0<c=\mathrm{const};$$

B) $$\left|\frac{e^{\lambda_n^j z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_n^j)}-\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\frac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}i(a_j-a_{j+1})}\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-cn},\qquad 0<c=\mathrm{const};$$

$j=1,2,\ldots N$, $z\in\overline{M}$;

C) $|\omega_f(\lambda_n^j)-\omega_{nj}|\leqslant A_p\|f\|_p\cdot e^{-cn}$, $\omega_{nj}\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_{jk}}f(\zeta)e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_k)}d\zeta$, $0<c=\mathrm{const}$, где γ_{jk} — часть ломаной C, соединяющей точки a_j и a_k, на которой выполняется неравенство $|\exp(\lambda_n^j(a_k-\zeta))|\leqslant\mathrm{const}$ $(\zeta\in\gamma_{jk})$.

Доказательство теоремы 1. Используя условие C), легко находим, что*

$$\omega_{nj}=f_{nj}+f_{nj}c_{nj}+b_{nj},\tag{3}$$

* Через $[a;\,b]$ обозначим отрезок в комплексной плоскости, соединяющий точки a и b.

где

$$f_{nj}=\int\limits_{a_j}^{a_{j+1}} f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_{j+1})}\,d\zeta=\frac{a_j-a_{j+1}}{2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} f\left(a_j+\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\,\theta\right)e^{\frac{i\theta}{2}}\,e^{-in\theta}\,d\theta \tag{4}$$

— коэффициенты Фурье функции $\pi(a_j-a_{j+1})\,f\left(a_j+\frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\,\theta\right)e^{\frac{i\theta}{2}}\in$ $\in L^p(0, 2\pi)$,

$$c_{nj}=\sum_{\substack{k:k\neq j,\ j+1,\\ \gamma_{jk}\supset[a_j;a_{j+1}]}}\exp\left(-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(a_{j+1}-a_k)\right),$$

$$b_{nj}=\sum_{\substack{k:k\neq j,\ j+1,\\ \gamma_{jk}\supset[a_j;a_{j+1}]}}\ \int\limits_{\gamma_{jk}\setminus[a_j;a_{j+1}]} f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_k)}\,d\zeta+$$

$$+\sum_{\gamma_{jk}\supset[a_j;a_{j-1}]}\ \int\limits_{\gamma_{jk}} f(\zeta)\,e^{-\overset{0}{\lambda}{}_n^j(\zeta-a_k)}\,d\zeta.$$

Из последних соотношений, учитывая определение чисел $\overset{0}{\lambda}{}_n^j$ (см. A)) и выпуклость M, легко заключаем, что

$$|c_{nj}|\leqslant \text{const}\,e^{-cn},\quad b_{nj}\leqslant A_p\cdot\|f\|_p\,e^{-cn},\quad 0<c=\text{const}. \tag{5}$$

Из (3) — (5) следует, что $\tilde{\omega}_{nj}$ — коэффициенты Фурье некоторой функции $\tilde{\varphi}_j(\theta)\in L^p(0, 2\pi)$, причем $\|\tilde{\varphi}_j(\theta)\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant A_p\,\|f(z)\|_{E_p(M)}$. Отсюда и из условия C) заключаем, что $\omega_f(\lambda_n^j)$ — коэффициенты Фурье некоторой функции $\varphi_j(\theta)\in L^p(0, 2\pi)$ и

$$\|\varphi_j(\theta)\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant A_p\,\|f(z)\|_{E_p(M)}\,. \tag{6}$$

Выберем теперь такое n_0, что при $n>n_0$ и всех $1\leqslant j\leqslant N$ имеем $|\overset{0}{\lambda}{}_n^j|>\Lambda$. Тогда, используя абсолютную сходимость ряда (1) при $z\in M$, запишем

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\omega_f(\lambda_m)\,\frac{e^{\lambda_m z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_m)}=\sum_{j=1}^{N}\psi_j(z)+\psi(z)\quad (z\in M), \tag{7}$$

где

$$\psi_j(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}\omega_f(\lambda_n^j)\,\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\frac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}\cdot i\cdot(a_j-a_{j+1})}\quad (j=1, 2, \ldots, N;\ z\in M), \tag{8}$$

$$\psi(z)=\sum_{m=1}^{m_0}\omega_f(\lambda_m)\,\frac{e^{\lambda_m z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_m)}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\omega_f(\lambda_n^j)\left(\frac{e^{\lambda_n^j z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_n^j)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_n^j\left(z-\frac{a_j+a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{n+1}\,i\,(a_j-a_{j+1})}\right)\quad (z\in M), \tag{9}$$

m_0 — некоторый индекс, зависящий от n_0. Учитывая условие C), видим, что ряд (9) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{M}$ и, более того, абсолютно и равномерно в $\overline{M}$ сходится ряд, полученный из (9) почленным дифференцированием любое число раз (так что $\psi(z)$ бесконечно дифференцируема в $\overline{M}$). Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться, что при всех $1 \leqslant j \leqslant N$ ряды (8) сходятся в метрике E_p. Положим

$$a_{kj}(z) = \omega_f(\lambda_k^j) \frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_k^j\left(z - \dfrac{a_j + a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{k+1} i (a_j - a_{j+1})}.$$

При натуральных $m > n > n_0$ имеем

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} \left| \sum_{k=n}^{m} a_{kj}(z) \right|^p |dz| = (2\pi)^{-p} |a_j - a_{j+1}|^{1-p} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{m} \omega_f(\lambda_k^j) e^{ik\theta} \right|^p d\theta \to 0 \quad (m > n \to \infty), \tag{10}$$

так как, по доказанному, ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \omega_f(\lambda_n^j) e^{in\theta}$ — ряд Фурье функции $\varphi_j(\theta) \in L^p(0, 2\pi)$ и, значит, он сходится в метрике $L^p(0, 2\pi)$. Далее,

$$\int_{a_{j+1}}^{a_{j+2}} \left| \sum_{k=n}^{m} a_{kj}(z) \right|^p |dz| = \frac{|a_{j+2} - a_{j+1}|}{(2\pi)^p |a_j - a_{j+1}|^p} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{m} \omega_f(\lambda_k^j) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(\frac{\left(k - \dfrac{1}{2}\right)(a_{j+2} - a_{j+1})}{i(a_j - a_{j+1})} \theta\right) \right|^p d\theta \leqslant A_p \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{m} \omega_f(\lambda_k^j) e^{ik\alpha_j\theta} e^{-k\beta_j\theta} \right|^p d\theta, \tag{11}$$

где

$$\alpha_j = \operatorname{Im}\left(\frac{a_{j+2} - a_{j+1}}{i(a_j - a_{j+1})}\right) \neq 0, \quad \beta_j = -\operatorname{Re}\left(\frac{a_{j+2} - a_{j+1}}{i(a_j - a_{j+1})}\right) > 0.$$

Положим $s_{nm}(\theta) = \sum\limits_{k=n}^{m} \omega_f(\lambda_k^j) e^{ik\theta}$. Тогда, используя преобразование Абеля, имеем

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \omega_f(\lambda_k^j) e^{ik\alpha_j\theta} \cdot e^{-k\beta_j\theta} \right| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} s_{nk}(\alpha_j\theta) (e^{-k\beta_j\theta} - e^{-(k+1)\beta_j\theta}) + s_{nm}(\alpha_j\theta) \times \right.$$

$$\left. \times e^{-m\beta_j\theta} \right| \leqslant \sup_{k>n} |s_{nk}(\alpha_j\theta)| (e^{-n\beta_j\theta} - e^{-m\beta_j\theta}) + |s_{nm}(\alpha_j\theta)| e^{-m\beta_j\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k>n} |s_{nk}(\alpha_j\theta)| + |s_{nm}(\alpha_j\theta)|. \tag{12}$$

Заметим, что $s_{nk}(\theta)$ — частичные суммы k-го порядка ряда Фурье функции $\varphi_j(\theta) - s_{n-1}(\theta) \in L^p(0, 2\pi)$ $\left(s_{n-1}(\theta) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{n=n_0}^{n-1} \omega_f(\lambda_k^j) e^{ik\theta} \right.$ — частичные суммы $n-$ $\left. - 1\text{-го порядка ряда Фурье функции } \varphi_j(\theta) \right)$. Отсюда, из (11), (12) и неравенства Ханта (см. [7]) получаем

$$\int_{a_{j+1}}^{a_{j+2}}\left|\sum_{k=n}^{m} a_{kj}(z)\right|^p |dz| \leqslant A_p\,(\|\sup_{k>n}|s_{nk}(\alpha_j\theta)\|_{L^p(0,2\pi)} + \|s_{nm}(\alpha_j\theta)\|_{L^p(0,2\pi)})^p \leqslant$$

$$\leqslant A_p\,(\|\varphi_j(\theta) - s_{n-1}(\theta)\|_{L^p(0,2\pi)} + \|s_{nm}(\theta)\|_{L^p(0,2\pi)})^p \to 0 \quad (m > n \to \infty). \quad (13)$$

Точно так же находим, что

$$\int_{a_j}^{a_{j-1}}\left|\sum_{k=n}^{m} a_{kj}(z)\right|^p |dz| \to 0 \quad (m > n \to \infty). \quad (14)$$

Для оценки интеграла

$$I_{nm}^{(j)} \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\gamma_j}\left|\sum_{k=n}^{m} a_{kj}(z)\right|^p |dz| \quad (15)$$

по контуру $\gamma_j \overset{\mathrm{df}}{=} C \setminus ([a_{j+1}; a_{j+2}] \cup [a_j; a_{j-1}])$ достаточно заметить, что при $z \in \gamma_j$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\exp\left(\overset{0}{\lambda}{}_k^j\left(z - \dfrac{a_j + a_{j+1}}{2}\right)\right)}{(-1)^{k+1} i\,(a_j - a_{j+1})}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-ck}, \quad 0 < c = \mathrm{const}, \quad (16)$$

откуда легко следует, что

$$I_{nm}^{(j)} \to 0 \quad (m > n \to \infty). \quad (17)$$

Из соотношений (10), (13)—(15), (17) в силу полноты пространства $E_p(M)$ следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Равенство (1) следует на основании теоремы Хаусдорфа — Юнга из (6) и того факта, что, по доказанному, $\omega_f(\lambda_n^j)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi_j(\theta)$. Для доказательства п. II положим

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \frac{e^{\lambda_m z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_m)} \quad (z \in M). \quad (18)$$

Ряд (18) сходится абсолютно в M и равномерно на компактах внутри M (см. доказательство теоремы 2.2 в [6]). Перегруппировав очевидным образом члены ряда (18), запишем

$$f(z) = \sum_{m=1}^{m_0} \omega_m \frac{e^{\lambda_m z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_m)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_n^{(j)} \frac{e^{\lambda_n^j z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_n^j)} = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(z) + \psi(z) \quad (z \in M), \quad (19)$$

где функции $\psi_j(z)$ и $\psi(z)$ определяются по формулам (8), (9), в которых $\omega_f(\lambda_n^j)$ следует заменить на $\omega_n^{(j)}$. В силу условия теоремы, $\sum_{n=n_0}^{\infty} |\omega_n^{(j)}|^p < \infty$. Поэтому, на основании теоремы Хаусдорфа — Юнга. $\omega_n^{(j)}$ — коэффициенты Фурье некоторой функции из $L^q(0, 2\pi)$. Дословно повторяя доказательство теоремы 1, заключаем, что ряд (18) сходится (к $f(z)$) в метрике E_q. Отсюда следует*, что $f(z) \in E_q$ и $\omega_n^{(j)}$ — коэффициенты Леонтьева функции $f(z)$.

---

* Простое доказательство этих фактов опускается.

Далее (по схеме вывода (13) — (16)), получим

$$\|\psi_j\|_q = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=n_0}^{n} a_{kj}(z)\right\|_q = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\int_{a_j}^{a_{j+1}} + \int_{a_{j+1}}^{a_{j+2}} + \int_{a_j}^{a_{j-1}} + \int_{\gamma_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_{kj}(z)\right|^q |dz|\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant A_p \lim_{n\to\infty}\left\{\|s_n(\theta)\|^q_{L^q(0,2\pi)} + \right.$$

$$\left. + \|\sup_{k\leqslant n}|s_k(\alpha_j\theta)|\|^q_{L^q(0,2\pi)} + \int_{\gamma_j}\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_{kj}(z)\right|^q |dz|\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{20}$$

Но (см. (16))

$$\int_{\gamma_j}\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_{kj}(z)\right|^q |dz| \leqslant \left\{\sum_{k=n_0}^{n}\left(\int_{\gamma_j}|a_{kj}(z)|^q |dz|\right)^{\frac{1}{q}}\right\}^q \leqslant$$

$$\leqslant A_p\left\{\sum_{k=n_0}^{n}|\omega_k^{(j)}|\, e^{-ck}\right\}^q \leqslant A_p\left\{\sum_{k=n_0}^{n}|\omega_k^{(j)}|^p\right\}^{q/p}. \tag{21}$$

Из (20), (21), используя неравенство Ханта и теорему Хаусдорфа — Юнга находим, что

$$\|\psi_j\|_q \leqslant A_p \lim_{n\to\infty}\left(\|s_n(\theta)\|^q_{L^q(0,2\pi)} + \left(\sum_{k=n_0}^{n}|\omega_k^{(j)}|^p\right)^{q/p}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant A_p \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n_0}^{n}|\omega_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = A_p\left\{\sum_{n=n_0}^{\infty}|\omega_k^{(j)}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{22}$$

Далее, учитывая условие В), легко находим, что

$$\|\psi\|_q \leqslant A_p\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{23}$$

Из (22), (23) и (19) следует, что

$$\|f\|_q \leqslant A_p\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_m|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Этим теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме доказательства теоремы 2.

4. Простым следствием предыдущих исследований является такое утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $f(z)\in E_1(M)$, z_0 — *произвольная неугловая точка многоугольника* $\overline{M}$, *лежащая на стороне* $[a_{j_0}; a_{j_0+1}]$ $(1\leqslant j_0\leqslant N)$. *Положим* $f_j(\theta) = f\left(a_j + \frac{a_{j+1}-a_j}{2\pi}\theta\right)$, $0<\theta<2\pi$, *и пусть точке* z_0 *соответствует точка* θ_0, $0<\theta_0<2\pi$, *при отображении* $z = a_{j_0} + \frac{a_{j_0+1}-a_{j_0}}{2\pi}\theta$. *Тогда для* *сходимости ряда* (1) *в точке* z_0 *необходимо и достаточно, чтобы в точке* θ_0 *сходился ряд Фурье функции* $f_{j_0}(\theta)$ *и сопряженный ему ряд.*

Действительно, из (7) — (9) и того факта, что при $j \neq j_0$ ряды (8) и ряд (9) абсолютно сходятся в точке z_0, заключаем, что сходимость ряда (1) в точке z_0 эквивалентна сходимости в этой точке ряда (8) при $j = j_0$, что в силу (3) — (5) эквивалентно сходимости в точке θ_0 ряда $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f_{nj_0} e^{in\theta}$. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы (см. [4, т. 1, с. 61]).

5. Повторяя рассуждения теоремы 1 с заменой всюду суммы $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_{kj}(z)\right|$ на $\sup\limits_{n}\left|\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_{kj}(z)\right|$, легко убеждаемся, что для рядов Дирихле (1) имеет место аналог неравенства Ханта [7]:

Теорема 5. *Если*

$$f(z) \in E_p, \quad 1 < p < \infty, \quad S_m(f; z) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{m} \omega_f(\lambda_k) \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathfrak{L}'(\lambda_k)}$$

— *частичные суммы ряда* (1), *то* $\int\limits_C (\sup\limits_m |S_m(f; z)|)^p |dz| \leqslant A_p \int\limits_C |f(z)|^p |dz|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1950.— 336 с.
2. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 6, с. 826—830.
3. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле.— В кн.: Исследования по теории приближения функций и их приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 132—141.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.— М.: Мир, 1965.— Т. I. 615 с.; Т. II. 537 с.
5. Седлецкий А. М. Базисы из экспонент в пространствах L^p на выпуклых многоугольниках.— Изв. АН СССР, 1978, 42, № 5, с. 1101—1119.
6. Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках.— Мат. сб., 1974, 95, № 4, с. 475—493.
7. Hunt A. On the convergence of Fourier series.— Orthogonal expansions and their continuous analogues, 1968, p. 235—255.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10.IV 1979 г.