УДК 517.948:513.88

П. П. Мельничак

О задаче Коши для уравнений в радиальных дифференциалах

1. Пусть в банаховом пространстве B задан непрерывный функционал $\varphi(x)$ и область $G_\varphi = \{x \in B : \varphi(x) \geqslant 0\}$, не содержащая точки 0; ее границу обозначим $\partial G_\varphi = \{x \in G_\varphi,\ \varphi(x) = 0\}$. Предположим также, что для каждого $x \in G_\varphi$ существует единственное вещественное число $H = H(x) \geqslant 1$ такое, что $\varphi\left(\frac{x}{H(x)}\right) = 0$. Ясно, что $H(x)$ — функционал, удовлетворяющий условию $H(tx) = tH(x)$ (вещественное $t > 0$), т. е. $H(x)$ — однородный функционал первой степени.

Например, если $\varphi(x) = f(x) - \alpha$, где $f(x)$ — линейный непрерывный функционал в B, $\alpha > 0$, то ∂G_φ представляет собой гиперплоскость; если же в качестве φ взять функционал $\varphi(x) = \|x\| - R$, $R > 0$, то ∂G_φ — сфера $\|x\| = R$, а G_φ — внешность этой сферы.

Рассмотрим в области G_φ непрерывный функционал $u(x)$. Если существует

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{u(x+tx) - u(x)}{t} = u'(x)\,x,$$

то он называется радиальным дифференциалом функционала $u(x)$ в точке x, а сам процесс его нахождения — дифференцированием в радиальном направлении. Ясно, что если $u(x)$ дифференцируем по Фреше (см. [1]) в точке x, то в этой точке существует и радиальный дифференциал.

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\,u(tx) = \lim_{\tau\to 0} \frac{u((t+\tau)x) - u(tx)}{\tau} = u'(tx)\,x,$$

то $u'(x)\,x = \left.\frac{d}{dt}\,u(tx)\right|_{t=1}$. Поэтому естественно назвать n-м радиальным дифференциалом функционала $u(x)$ в точке x выражение $\left.\frac{d^n}{dt^n}\,u(tx)\right|_{t=1} = u^{(n)}(x)\,x^n$ (конечно, при условии, что $u(tx)$ n раз дифференцируемо по t при $t = 1$).

Заметим, что если функционал $u(x)$ n раз дифференцируем в смысле Фреше, то он имеет и n-й радиальный дифференциал.

2. Рассмотрим линейное уравнение

$$u^{(n)}(x)\,x^n + P_1(x)\,u^{(n-1)}(x)\,x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\,u'(x)\,x + P_n(x)\,u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $P_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $f(x)$ — непрерывные функционалы в области G_φ. Например, в пространстве $B = R^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m)\}$ при $n = 1$ и $P_1(x) = -r$ (r — вещественное число) это уравнение приобретает вид $\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}x_m = ru$ и, как известно (теорема Эйлера, см. [2]), описывает все однородные функции порядка r.

Для уравнения (1) ставится задача Коши

$$\begin{aligned} u(x)\,|_{x\in\partial G_\varphi} &= \psi_0(x),\\ u'(x)\,x\,|_{x\in\partial G_\varphi} &= \psi_1(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\\ u^{(n-1)}(x)\,x^{n-1}\,|_{x\in\partial G_\varphi} &= \psi_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ — функционалы, заданные на границе области G_φ).

Теорема. *Решение задачи Коши (1)—(2) существует и единственно в классе n раз радиально дифференцируемых в области G_φ функционалов.*

Доказательство. Допустим, что n раз радиально дифференцируемые функционалы $u_1(x)$, $u_2(x)$ — решения задачи (1)—(2). Тогда функционал $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ удовлетворяет соответствующему (1) однородному уравнению и нулевым данным Коши на границе ∂G_φ. Покажем, что $u(x) \equiv 0$ в G_φ.

Предположим противное, т. е. что в области G_φ найдется точка $\tilde{x}$, в которой $u(\tilde{x}) \neq 0$. В силу определения G_φ любая точка $x \in G_\varphi$ может быть представлена как $x = x_0 t$ $(t = H(x) > 1)$, где x_0 — соответствующая точка границы ∂G_φ. Поэтому функционал $u(x)$ на луче $x = x_0 t$ удовлетворяет уравнению

$$u^{(n)}(x_0 t)(x_0 t)^n + P_1(x_0 t)\, u^{(n-1)}(x_0 t)\cdot(x_0 t)^{n-1} + \ldots + P_n(x_0 t)\, u(x_0 t) = 0.$$

Обозначая $u(x_0 t)$ через $\varphi(t) : u(x_0 t) = \varphi(t)$, $P_i(x_0 t) = \bar{P}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, придем к следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\varphi^{(n)}(t)\, t^n + \bar{P}_1(t)\, \varphi^{(n-1)}(t)\, t^{n-1} + \ldots + \bar{P}_{n-1}(t)\, \varphi'(t)\, t + \bar{P}_n(t)\, \varphi(t) = 0,$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(1) = 0.$$

Эта задача, как известно, имеет только тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$, откуда $u(x) = 0$ во всей области G_φ. Это противоречие доказывает единственность решения задачи (1)—(2).

Докажем теперь существование решения этой задачи. Уравнение (1) эквивалентно системе $Y'(x)\cdot x = A(x)\, Y(x) + F(x)$, где $Y(x) = \{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$, где $y_k(x) = u^{(k)}(x)\cdot x^k$, $Y'(x)\cdot x$ — радиальный дифференциал от вектор-функции $Y(x)$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -P_n(x) & -P_{n-1}(x) & -P_{n-2}(x) & \ldots & -P_1(x) \end{pmatrix},$$

$$F(x) = \{0, \ldots, 0, f(x)\}.$$

На луче, проходящем через точки x и $\dfrac{x}{H(x)} = x_0$, эта система запишется как обыкновенная:

$$\frac{dY(tx_0)}{dt} = A_1(tx_0)\, Y(tx_0) + F(tx_0), \tag{3}$$

где $A_1(tx_0) = \dfrac{A(tx_0)}{t}$. Задача Коши (2) для уравнения (1) переходит в задачу Коши

$$Y(1) = \{\psi_0(x_0), \ldots, \psi_{n-1}(x_0)\} = \Psi(x_0) \tag{4}$$

для системы (3). Разрешимость же этой задачи эквивалентна разрешимости системы интегральных уравнений $Y(tx_0) = Y(1) + \int\limits_1^t [A_1(\xi x_0) Y(\xi x_0) + F(\xi x_0)]\, d\xi$, которую, учитывая обозначения $t = H(x)$, $x = tx_0$, можно записать в виде

$$Y(x) = \Psi\left(\frac{x}{H(x)}\right) + \int\limits_1^{H(x)} \left[A_1\left(\xi\frac{x}{H(x)}\right) Y\left(\xi\frac{x}{H(x)}\right) + F\left(\xi\frac{x}{H(x)}\right)\right] d\xi. \tag{5}$$

При сделанных предположениях на коэффициенты $P_i(x)$ методом последовательных приближений можно показать, что эта система всегда разрешима. При этом соотношение (5) показывает, что решение n раз радиально дифференцируемо в замыкании G_φ. Теорема доказана.

Замечание 1. Если наложить определенные условия гладкости на границу ∂G_φ, начальные данные $\psi(x)$ и фоэффициенты $P_i(x)$ (например, потребовать непрерывную дифференцируемость по Фреше $H(x)$, $\psi_i(x)$ и $P_i(x)$), то, как показывает соотношение (5), решение задачи (1)—(2) будет n раз непрерывно дифференцируемым по Фреше.

Замечание 2. Ясно, что дифференцируемость функционала $H(x)$ связана с определенными свойствами функционала φ, задающего область. Если функционал $\varphi(x)$ дифференцируемый и его производная $\varphi'(x) \neq 0$, то из теоремы о неявных функциях [1] вытекает дифференцируемость $H(x)$.

3. Рассмотрим однородное уравнение (1) ($f(x) = 0$) и предположим, что функционалы $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ — его решения. Обозначим

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & \ldots & u_n(x) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ u_1^{(n-1)}(x)\cdot x^{n-1} & \ldots & u_n^{(n-1)}(x)\cdot x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Этот детерминант — аналог вронскиана.

Систему решений $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ будем называть фундаментальной, если ее вронскиан $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке области G_φ.

Как показано в [3], для того чтобы система решений $u_1, \ldots, u_n$ была фундаментальной, достаточно, чтобы ее вронскиан был отличен от нуля на границе ∂G_φ. Используя этот факт и доказанную теорему, получаем следствие.

Следствие. *Для однородного уравнения* (1) *всегда существует фундаментальная система решений.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.— 434 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Физматгиз, 1962.— 399 с.
3. Сявавко М. С., Мельничак П. П. Об одном классе уравнений с функциональными производными.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 6, с. 836—841.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
28.IV 1980 г.