УДК 517.946

Ю. А. Митропольский, С. А. Кривошея

Асимптотическое решение одного класса краевых задач

Рассмотрим смешанную задачу, определяемую уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right), \tag{1}$$

краевыми

$$\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \xi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (x = 0),$$

$$\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \omega\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (x = 1) \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = Y(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Z(x). \tag{3}$$

В (1) — (3) $f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$, $\xi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$,

$\omega\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — целые рациональные функции относительно u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ и u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ соответственно; $Y(x)$, $Z(x)$ — достаточно гладкие на $[0, 1]$ функции; α_1, α_2, β_1, β_2, β — действительные числа ($\beta^2 + \beta_2^2 \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$), $0 < \varepsilon$ — малый параметр.

Смешанная задача для уравнения (1) с квазилинейными краевыми условиями возникает при исследовании колебательных процессов во многих реальных распределенных системах [1, 2]. Квазилинейные краевые условия вида (2) с входящей второй производной по времени от искомой функции встречается при решении в нелинейной постановке различных практических задач. К таким задачам относятся, например, задачи о крутильных колебаниях вала с диском, о продольных колебаниях стержня с грузом на одном конце, о поперечных колебаниях струны, на свободном конце которой имеется сосредоточенная масса, о колебаниях напряжения в длинных линиях [3—5]. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения на основе асимптотических методов нелинейной механики приближенного решения задачи (1)—(3).

В соответствии с идеями асимптотических методов нелинейной механики, рассмотрим вначале «невозмущенную» краевую задачу ((1), (2) при $\varepsilon = 0$). Применив к последней метод разделения переменных, для общего решения получим

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x) \cos(\lambda_n t + \delta_n), \tag{4}$$

где a_n, δ_n — произвольные постоянные, λ_n — собственные числа — корни характеристического уравнения

$$(h_2\lambda^2 - h_0)\sin\lambda + (h_3\lambda^3 + h_1\lambda)\cos\lambda = 0,$$
$$(h_0 = \alpha_1\alpha_2,\ h_1 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,\ h_2 = \alpha_1\beta - \beta_1\beta_2,\ h_3 = \beta\beta_1), \tag{5}$$

$X_n(x)$ — фундаментальные функции, являющиеся решениями задачи на собственные значения вида

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{6}$$

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \quad (\alpha_2 - \beta\lambda^2) X(1) + \beta_2 X'(1) = 0. \tag{7}$$

Заметим, что коэффициенты краевых условий задачи (6), (7) зависят от собственного числа λ. Фундаментальные функции $X_n(x)$ имеют вид

$$X_n(x) = c_{1n}\cos\lambda_n x + c_{2n}\sin\lambda_n x \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где постоянные c_{1n}, c_{2n} определяются с точностью до произвольного числового множителя из уравнения

$$\alpha_1 c_{1n} + \beta_1\lambda_n c_{2n} = 0. \tag{9}$$

Нетрудно установить следующие свойства фундаментальных функций $X_n(x)$ и собственных чисел λ_n.

1. Характеристическое уравнение (5) имеет равные по модулю и противоположные по знаку корни.

В силу свойства 1 достаточно рассмотреть случай $\lambda_n \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

2. Всякому собственному числу соответствует только одна линейно независимая фундаментальная функция.

3. Фундаментальные функции, соответствующие различным собственным числам $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны на $[0, 1]$ с весом $\rho(x) = 1 + \frac{\beta}{\beta_2}\delta(x -$

— 1), где $\delta(x-1)$ — дельта-функция Дирака:

$$\int_0^1 X_i(x)\, X_j(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (i \neq j). \tag{10}$$

Предположим, что функции $Y(x)$, $Z(x)$ в (3) могут быть аппроксимированы с точностью до величин порядка ε первыми R фундаментальными функциями $X_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, R)$, так что вместо (3) имеем

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^{R} p_i X_i(x) + \varepsilon y(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{R} q_i X_i(x) + \varepsilon z(x), \tag{11}$$

где p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots, R)$ — действительные числа, $y(x)$, $z(x)$ — достаточно гладкие на $[0, 1]$ функции.

Учитывая (4) и начальные условия (11) при $\varepsilon = 0$, частное решение «невозмущенной» смешанной задачи получим в виде

$$u_0(x, t) = \sum_{i=1}^{R} a_i^0 X_i(x) \cos(\lambda_i t + \delta_i^0), \tag{12}$$

где начальные амплитуды и фазы определяются согласно формулам

$$a_i^0 = \sqrt{p_i^2 + \frac{q_i^2}{\lambda_i^2}}, \quad \delta_i^0 = -\operatorname{arctg} \frac{q_i}{p_i \lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, R). \tag{13}$$

Таким образом, в невозмущенной системе существует R-частотный режим колебаний, представляющий собой суперпозицию незатухающих нормальных одночастотных колебаний.

Рассматривая «возмущенную» задачу (1), (2), (11), построим приближенное решение, соответствующее R-частотному режиму колебаний, близкому к (12). При этом предполагаем, что в «невозмущенной» системе отсутствуют внутренние резонансы:

$$\lambda_n \neq \sum_{i=1}^{R} n_i \lambda_i \quad (n = R+1,\ R+2, \ldots), \tag{14}$$

где n_i $(i = 1, 2, \ldots, R)$ — некоторые целые числа $(-N \leqslant n_1, \ldots, n_R \leqslant N)$.

Решение задачи (1), (2), (11) ищем в виде асимптотического разложения

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{R} a_i X_i(x) \cos \psi_i + \varepsilon u_1(x, a_j, \psi_j) + \ldots \tag{15}$$

где $u_i(x, a_j, \psi_j) \equiv u_i(x, a_1, a_2, \ldots, a_R, \ \psi_1, \ldots, \varphi_R)$, а a_j, ψ_j определяются из системы уравнений

$$\frac{da_i}{dt} = \varepsilon A_1^{(i)}(a_j) + \ldots, \frac{d\psi_i}{dt} = \lambda_i + \varepsilon B_1^{(i)}(a_j) + \ldots (i, j = 1, 2, \ldots, R). \tag{16}$$

Для функций u_j, $A_j^{(i)}$, $B_j^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, R;\ j = 1, 2, \ldots)$ необходимо подобрать такие выражения, чтобы разложение (15), в котором вместо a_j, ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, R)$ будут подставлены функции времени, определяемые из (16), оказалось бы решением задачи (1), (2), (11).

Разложение (15) с учетом (16) подставляем в уравнение (1), краевые условия (2) и начальные условия (11). Левые и правые части полученных выражений располагаем по возрастающим степеням параметра ε. Приравнивая затем коэффициенты при ε^j, получаем последовательность линейных задач для определения u_j, $A_j^{(i)}$, $B_j^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, R;\ j = 1, 2, \ldots)$. Для построения первого и первого улучшенного приближений достаточно найти u_1, $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, R)$. Для u_1, $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$ получаем линейную смешанную задачу, определяемую уравнением

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left(\sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^{(2)} u_1 = f_0(x, a_j, \psi_j) -$$

$$- \sum_{i=1}^{R} 2\lambda_i [A_1^{(i)} \sin \psi_i + a_i B_1^{(i)} \cos \psi_i] X_i(x), \tag{17}$$

краевыми

$$\alpha_1 u_1 + \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \xi(a_j, \psi_j) \quad (x = 0),$$

$$\alpha_2 u_1 + \beta_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta \left(\sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^{(2)} u_1 = \omega(a_j, \psi_j) +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{R} 2\lambda_i [A_1^{(i)} \sin \psi_i + a_i B_1^{(i)} \cos \psi_i] X_i(x) \quad (x = 1) \tag{18}$$

и начальными условиями

$$u_1(x, a_j^0, \delta_j^0) = y(x), \sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial u_1}{\partial \psi_i}(x, a_j^0, \delta_j^0) =$$

$$= z(x) - \sum_{i=1}^{R} \left[\frac{p_i}{a_i^0} A_1^{(i)}(a_j^0) + \frac{q_i}{\lambda_i} B_1^{(i)}(a_j^0) \right] X_i(x). \tag{19}$$

В (17), (18) обозначено

$$f_0(x, a_j, \psi_j) = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\Bigg|_{u = \sum_{i=1}^{R} a_i X_i(x) \cos \psi_i},$$

$$\xi(a_j, \psi_j) = \xi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{u = \sum_{i=1}^{R} a_i X_i(x) \cos \psi_i \ (x=0)}, \tag{20}$$

$$\omega(a_j, \psi_j) = \omega\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{u = \sum_{i=1}^{R} a_i X_i(x) \cos \psi_i \ (x=1)}.$$

В (19) начальные значения a_j, ψ_j приняты равными начальным значениям этих величин (13).

Общее решение задачи (17), (18) можно представить в виде

$$u_1(x, a_j, \psi_j) = \bar{u}(x, \varphi_j) + w(x, a_j, \psi_j), \tag{21}$$

где $\bar{u}(x, \psi_j)$ — общее решение линейной однородной краевой задачи, соответствующей (17), (18), а $w(x, a_j, \psi_j)$ — частное 2π-периодическое по ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, R)$ решение неоднородной задачи (17), (18).

Сравнивая (17) и (18), заключаем, что краевые условия для $w(x, a_j, \psi_j)$ можно записать в виде

$$\alpha_1 w + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \xi(a_j, \psi_j) \quad (x = 0),$$

$$\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_2 w + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x} = \beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j) \quad (x = 1). \tag{22}$$

Функцию $w(x, a_j, \psi_j)$, являющуюся решением задачи (17), (22), ищем в виде суммы

$$w(x, a_j, \psi_j) = v(x, a_j, \psi_j) + \chi(x, a_j, \psi_j), \tag{23}$$

где $v(x, a_j, \psi_j)$ — новая искомая функция, а функция $\chi(x, a_j, \psi_j)$ должна быть подобрана таким образом, чтобы краевые условия для $v(x, a_j, \psi_j)$ были линейными и однородными.

Для $\chi(x, a_j, \psi_j)$ имеем систему соотношений

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \chi + \beta_1 \frac{\partial \chi}{\partial x} = \xi(a_j, \psi_j) \quad (x = 0), \\ &\beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \alpha_2 \chi + \beta_2 \frac{\partial \chi}{\partial x} = \beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j) \quad (x = 1). \end{aligned} \tag{24}$$

Системой (24) функция $\chi(x, a_j, \psi_j)$ определяется, очевидно, неоднозначно. Приведем примеры практического построения функции $\chi(x, a_j, \psi_j)$. Рассмотрим такие случаи.

1. $\alpha_1 \neq 0$. Функцию $\chi(x, a_j, \psi_j)$ из (24) ищем в виде

$$\chi(x, a_j, \psi_j) = c_1(a_j, \psi_j) + c_2(a_j, \psi_j)\, p(x), \tag{25}$$

где $p(x)$ — многочлен.

Для коэффициентов c_1, c_2 имеем систему

$$\begin{aligned} &\alpha_1 c_1 + [\alpha_1 p(0) + \beta_1 p'(0)]\, c_2 = \xi(a_j, \psi_j), \\ &\alpha_2 c_1 + [\alpha_2 p(1) + \beta_2 p'(1) + \beta p''(1)]\, c_2 = \beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j). \end{aligned} \tag{26}$$

При $p(0) = 0$, $p'(0) = p'(1) = p(1) = 1$ в случае, когда определитель системы (26) $\Delta = \alpha_1(\alpha_2 + \beta_2) - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, положим $p''(x) = 0$. Тогда для $\chi(x, a_j, \psi_j)$ получим формулу (25), в которой $p(x) \equiv x$,

$$\begin{aligned} &c_1(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\Delta}\{(\alpha_2 + \beta_2)\,\xi(a_j, \psi_j) - \beta_1[\beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j)]\}, \\ &c_2(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\Delta}\{\alpha_1[\beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j)] - \alpha_2\xi(a_j, \psi_j)\}. \end{aligned} \tag{27}$$

В случае $\Delta = 0$ положим $p''(1) = 1$. Тогда определитель системы $\Delta_1 = \alpha_1 \times \times (\alpha_2 + \beta_2 + \beta) - \alpha_2\beta_1 = \alpha_1\beta \neq 0$. Для $\chi(x, a_j, \psi_j)$ получим (25), в которой $p(x) \equiv \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$,

$$\begin{aligned} &c_1(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\Delta_1}\{(\alpha_2 + \beta_2 + \beta)\,\xi(a_j, \psi_j) - \beta_1[\beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j)]\}, \\ &c_2(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\Delta_1}\{\alpha_1[\beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j)] - \alpha_2\xi(a_j, \psi_j)\}. \end{aligned} \tag{28}$$

2. $\alpha_1 = 0$. Функцию $\chi(x, a_j, \psi_j)$ ищем в виде

$$\chi(x, a_j, \psi_j) = c_1(a_j, \psi_j)\, x + c_2(a_j, \psi_j)\, q(x), \tag{29}$$

где $q(x)$ — многочлен. Коэффициенты c_1 и c_2 определяются из системы

$$\beta_1 c_1 + \beta_2 q'(0) c_2 = \xi(a_j, \psi_j), \quad (\alpha_2 + \beta_2) c_1 + [\alpha_2 q(1) + \beta_2 q'(1) + \beta q''(1)] c_2 = = \beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j). \tag{30}$$

Положим $q(1) = q'(0) = q'(1) = 0$, $q''(1) = 1$. Тогда для $\chi(x, a_j, \psi_j)$ получим формулу (29), в которой $q(x) \equiv \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6}$,

$$c_1(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\beta_1} \xi(a_j, \psi_j),$$
$$c_2(a_j, \psi_j) = \frac{1}{\beta} \left[\beta f_0(1, a_j, \psi_j) + \omega(a_j, \psi_j) - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\beta_1} \xi(a_j, \psi_j) \right]. \tag{31}$$

Для $v(x, a_j, \psi_j)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^{(2)} v = F(x, a_j, \psi_j) - \sum_{i=1}^{R} 2\lambda_i (A_1^{(i)} \sin \psi_i + a_i B_1^{(i)} \cos \psi_i) X_i(x), \tag{32}$$

$$\alpha_1 v + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \qquad \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha_2 v + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x = 1), \tag{33}$$

где

$$F(x, a_j, \psi_j) = \left(\sum_{i=1}^{R} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \right)^{(2)} \chi(x, a_j, \psi_j) - \frac{\partial^2 \chi(x, a_j, \psi_j)}{\partial x^2} + f_0(x, a_j, \psi_j). \tag{34}$$

Функцию $v(x, a_j, \psi_j)$ из (32), (33) ищем при помощи метода неопределенных коэффициентов в виде

$$v(x, a_j, \psi_j) = \sum_{s=1}^{\infty} w_s(a_j, \psi_j) X_s(x). \tag{35}$$

В результате для $w_s(a_j, \psi_j)$, $A_1^{(s)}(a_j)$, $B_1^{(s)}(a_j)$ получаем

$$w_s(a_j, \psi_j) = - \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_R \\ \sum_{l=1, l \neq s}^{R} (n_s^2 - 1)^2 + n_l^2 \neq 0}} \frac{F_{n_1, \ldots, n_R}^{(s)}(a_j)}{\lambda_s^2 - \left(\sum_{l=1}^{R} n_l \lambda_l \right)^2} e^{i \sum_{l=1}^{R} n_l \psi_l} \quad (s = 1, 2, \ldots, R), \tag{36}$$

$$w_s(a_j, \psi_j) = - \sum_{n_1, \ldots, n_R} \frac{F_{n_1, \ldots, n_R}^{(s)}(a_j)}{\lambda_s^2 - \left(\sum_{l=1}^{R} n_l \lambda_l \right)^2} e^{i \sum_{l=1}^{R} n_l \psi_l} \quad (s = R + 1, R + 2, \ldots), \tag{37}$$

$$A_1^{(s)}(a_j) = \frac{1}{(2\pi)^R \lambda_s} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_s(a_j, \psi_j) \sin \psi_s d\psi_1 d\psi_2 \ldots d\psi_R,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, R) \tag{38}$$
$$b_1^{(s)}(a_j) = \frac{1}{(2\pi)^R \lambda_s a_s} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F_s(a_j, \psi_j) \cos \psi_s d\psi_1 d\psi_2 \ldots d\psi_R,$$

где $F^{(s)}_{n_1,\ldots,n_R}(a_j)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты R-кратного ряда Фурье функции

$$F_s(a_j, \psi_j) = \gamma_s \left\{ \int\limits_0^1 F(x, a_j, \psi_j) X_s(x)\, dx + \frac{\beta}{\beta_2} F(1, a_j, \psi_j) X_s(1) \right\},$$
$$\gamma_s = \left[\int\limits_0^1 X_s^2(x)\, dx + \frac{\beta}{\beta_2} X_s^2(1) \right]^{-1}. \tag{39}$$

Знаменатели в (37) не обращаются в нуль в силу сделанного предположения об отсутствии внутренних резонансов.

Полученные выражения для $A_1^{(s)}(a_j)$, $B_1^{(s)}(a_j)$, $(s = 1, 2, \ldots, R)$ дают возможность записать решение задачи (1), (2), (11) в первом асимптотическом приближении

$$u_1(x, t) = \sum_{s=1}^{R} a_s X_s(x) \cos\psi_s, \tag{40}$$

где a_s, ψ_s определяются из системы $2R$ уравнений первого приближения

$$\frac{da_s}{dt} = \varepsilon A_1^{(s)}(a_j), \quad \frac{d\psi_s}{dt} = \lambda_s + \varepsilon B_1^{(s)}(a_j) \quad (s = 1, 2, \ldots, R). \tag{41}$$

Функцию $\bar{u}(x, \psi_j)$ найдем, применяя к решению линейной однородной краевой задачи, соответствующей (17), (18), метод разделения переменных:

$$\bar{u}(x, \psi_j) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s X_s(x) \cos\left(\frac{\lambda_s}{R} \sum_{l=1}^{R} \frac{\psi_l}{\lambda_l} + \theta_s\right). \tag{42}$$

Постоянные b_s, θ_s $(s = 1, 2, \ldots)$ определяются из начальных условий (13).

В результате для первого улучшенного асимптотического приближения решения исходной задачи имеем

$$u_{1\text{ул.}}(x, t) = \sum_{s=1}^{R} a_s X_s(x) \cos\psi_s + \varepsilon \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left[w_s(a_j, \psi_j) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_s \cos\left(\frac{\lambda_s}{R} \sum_{l=1}^{R} \frac{\psi_l}{\lambda_l} + \theta_s\right)\right] X_s(x) + \chi(x, a_j, \psi_j) \right\}, \tag{43}$$

где

$$b_s = \sqrt{y_s^{*2} + \frac{z_s^{*2}}{\lambda_s^2}}, \quad \theta_s = -\operatorname{arctg}\frac{z_s^*}{\lambda_s y_s^*} - \frac{\lambda_s}{R} \sum_{l=1}^{R} \frac{\delta_l^0}{\lambda_l} \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{44}$$

$$y^*(x, a_j^0, \delta_j^0) \equiv y(x) - w(x, a_j^0, \delta_j^0), \quad z^*(x, a_j^0, \delta_j^0) \equiv z(x) -$$
$$- \sum_{i=1}^{R} \left[\frac{p_i}{a_i^0} A_1^{(i)}(a_j^0) + \frac{q_i}{\lambda_i} B_1^{(i)}(a_j^0) \right] X_i(x). \tag{45}$$

Функции $w_s(a_j, \psi_j)$ определяются по формулам (36), (37), а функция

$\chi(x, a_j, \psi_j)$ определяется согласно (24). Величины a_s, ψ_s $(s=1, 2, \ldots, R)$—решения системы $2R$ уравнений первого приближения (41).

Учитывая (23), (24), (34), (36), (37), (39), (38), заключаем, что функции $u_1(x, a_j, \psi_j)$, $A_1^{(s)}(a_j)$, $B_1^{(s)}(a_j)$ $(s = 1, 2, \ldots, R)$ выражаются в конечном итоге через заданные функции в правых частях уравнения и краевых условий исходной задачи так, что уже в первом приближении возможен анализ влияния нелинейных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев: Вища школа, 1976.— 585 с.
2. Бондарь Н. Г. Некоторые автономные задачи нелинейной механики.— Киев: Наук. думка, 1969.— 302 с.
3. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы.— Журн. техн. физ., 1934, **4**, вып. 1, с. 144—157.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высшая школа, 1970.— 710 с.

Институт математики АН УССР
Киевское высшее военное
авиационное инженерное училище

Поступила в редакцию
16.V 1980 г.