УДК 519.40

А. К. Слипенко

Строение правых n-групп

1. Правой n-группой называется n-полугруппа $S[\ ]$ с однозначно разрешимым уравнением $[a_1^{n-1}x]=b$ для произвольных a_i, $b\in S$ (здесь и далее через a_j^k обозначена последовательность $a_ja_{j+1}\dots a_k$, а запись a^k равносильна $aa\dots a$, где a повторяется k раз).

В работе обобщаются результаты о строении правых групп (см. [1, с. 61]). Первая попытка такого обобщения предпринята в работе [2], содержащей, однако, неоправданные ограничения.

2. Правым сдвигом φa_1^{n-1} назовем преобразование n-полугруппы S такое, что для всех $x\in S$ $x\varphi a_1^{n-1}=[xa_1^{n-1}]$. Сдвиг называется идемпотентным, если $\varphi a_1^{n-1}\circ\varphi a_1^{n-1}=\varphi a_1^{n-1}$, где $\circ$ — суперпозиция преобразований. Аналогично определяется левый сдвиг ψa_1^{n-1}, причем, для левых сдвигов будем употреблять запись $\psi a_1^{n-1}x=[a_1^{n-1}x]$. Сдвиг ψa_1^{n-1} называется левым единичным, если для всех $x\in S$ $\psi a_1^{n-1}x=x$.

Докажем, что для всякой правой n-группы множество правых идемпотентных сдвигов Φ не пусто. В самом деле, для произвольной последовательности a_1^{n-1} найдется единственный элемент e такой, что $[a_1^{n-1}e]=a_1$. Далее имеем: $[a_1^{n-1}ea_2^{n-1}e]=a_1$ и $[ea_2^{n-1}e]=e$. Но тогда для произвольного $x\in S$ $x\varphi a_2^{n-1}e\circ\varphi a_2^{n-1}e=[xa_2^{n-1}ea_2^{n-1}e]=[xa_2^{n-1}e]=x\varphi a_2^{n-1}e$.

Множество Φ всех правых идемпотентных сдвигов является n-полугруппой правых нулей относительно суперпозиции. Это утверждение вытекает из факта, который в дальнейшем будет неоднократно использован: если φa_1^{n-1} — идемпотентный правый сдвиг, то ψa_1^{n-1} будет левым единичным сдвигом. В самом деле, $[xa_1^{n-1}]=x\varphi a_1^{n-1}=x\varphi a_1^{n-1}\circ\varphi a_1^{n-1}=[xa_1^{n-1}a_1^{n-1}]$. Отсюда $a_{n-1}=[a_{n-1}a_1^{n-1}]$. Если $b\in S$, то $b=[a_1^{n-1}b_1]$, $\psi a_1^{n-1}b=[a_1^{n-1}a_1^{n-1}b_1]=$ $=[a_1^{n-1}b_1]=b$.

3. Зафиксируем в правой n-группе $S[\ ]$ некоторый правый идемпотентный сдвиг φe_1^{n-1}. Обозначим $S\varphi e_1^{n-1}=G$. Докажем, что $G[\ ]$ — n-подгруппа n-полугруппы S. Мы показали, что $[e_1^{n-1}s_i]=s_i$ для всех $s_i\in S$, поэтому $[s_1e_1^{n-1}s_2e_1^{n-1}\dots s_ne_1^{n-1}]=[s_1^ne_1^{n-1}]$, т. е. G замкнуто относительно операции $[\ ]$. Однозначная разрешимость уравнений $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n]=a$, $i=1,\dots,n$, следует, как показано в [3], из однозначной разрешимости уравнений

$$[a_1^{n-1}x]=a, \tag{1}$$

$$[xa_2^n]=a. \tag{2}$$

Разрешимость первого из них почти очевидна. Так как $a_i=[s_ie_1^{n-1}]$ и уравнение $[s_1^{n-1}x]=s$ в правой n-группе S имеет некоторое решение c, то $[ce_1^{n-1}]$ будет решением уравнения (1).

Пусть $e\in S$, тогда если b — произвольный элемент S, то $b\varphi e_1^{n-1}=[be_1^{n-1}]=[be_1^{n-1}e'_1e_2^{n-1}]=[be^{n-2}\bar e]=b\varphi e^{n-2}\bar e$, где $[e^{n-1}e'_1]=e_1$, $\bar e=[ee'_1e_2^{n-1}]$, т. е. $\varphi e_1^{n-1}=\varphi e^{n-2}\bar e$. Уравнение (2) после очевидных преобразований сводится к эквивалентному уравнению

$$[xe^{n-2}te^{n-2}\bar e]=[se^{n-2}\bar e], \tag{3}$$

где $s,t\in S$. Обозначим через $\bar t$ решение уравнения $[te^{n-2}xe^{n-2}\bar e]=[\bar ee^{n-2}\bar e]=\bar e$, т. е.

$$[te^{n-2}\bar te^{n-2}\bar e]=e. \tag{3'}$$

Так как $[\bar ee^{n-2}t]=t$, то из (3′) имеем:

$$[te^{n-2}\bar te^{n-2}\bar ee^{n-2}t]=t,\ [te^{n-2}\bar te^{n-2}te^{n-2}\bar e]=[te^{n-2}\bar e].$$

Отсюда $[\bar te^{n-2}te^{n-2}\bar e]=\bar e$.

Решением уравнения (3) будет $[se^{n-2}\bar te^{n-2}\bar e]$. В самом деле,

$$[se^{n-2}\bar te^{n-2}\bar ee^{n-2}te^{n-2}\bar e]=[se^{n-2}\bar te^{n-2}te^{n-2}\bar e]=[se^{n-2}\bar e].$$

Осталось доказать единственность решений уравнений (1) и (2). Но как и для бинарных групп, можно показать, что однозначность следует из разрешимости. Для этого обозначим решение уравнения $[a^{n-1}x]=a$ через $\bar a$. Тогда для любого элемента b $[ba^{n-2}\bar a]=[[b_1a^{n-1}]a^{n-2}\bar a]=[b_1a^{n-1}]=b$ (в том числе и $[\bar aa^{n-2}\bar a]=\bar a$). Но тогда $[\bar aa^{n-2}b]=[\bar aa^{n-2}\bar aa^{n-2}b_1]=[\bar aa^{n-2}b_1]=b$. Если $\bar{\bar a}$—другое решение уравнения $[a^{n-1}x]=a$, то $[\bar{\bar a}a^{n-2}\bar a]=\bar a=\bar{\bar a}$. Итак, $a\to\bar a$ — унарная операция, для которой выполняются тождества $[ba^{n-2}\bar a]=b$ и $[\bar aa^{n-2}b]=b$. Далее, $[ba^{n-3}\bar aa]=[b_1a^{n-1}a^{n-3}\bar aa]=[b_1a^{n-1}]=b$, $[a\bar aa^{n-3}b]=[a\bar aa^{n-3}a^{n-1}b_1]=[a^{n-1}b_1]=b$. Условия Глейхгевихта и Глазека (см. [4, с. 53]) выполняются, т. е. n-полугруппа, в которой разрешимы уравнения (1) и (2), будет n-группой.

4. Теорема. *Всякая правая n-группа S изоморфна прямому произведению n-группы G и n-полугруппы правых нулей Φ* (см. пп. 2, 3).

Ясно, что декартово произведение $G\times\Phi$ является правой n-группой относительно операции, индуцируемой компонентными действиями в G и Φ. Определим отображение $F:G\times\Phi\to S$, полагая $(a,\varphi f_1^{n-1})F=[af_1^{n-1}]$. F — гомоморфизм, так как $[(a_1,\varphi f_1^{n-1})\dots(a_n,\varphi g_1^{n-1})]F=([a_1\dots a_n],\varphi g_1^{n-1})$ и $[(a_1,\varphi f_1^{n-1})F\dots(a_n,\varphi g_1^{n-1})F]=[[a_1f_1^{n-1}]\dots[a_ng_1^{n-1}]]=[a_1^ng_1^{n-1}]=([a_1\dots a_n],\varphi g_1^{n-1})$.

Покажем, что F—инъекция. Предположим, что $(a, \varphi f_1^{n-1}) F=(b,\varphi g_1^{n-1})F$, где $a, b \in G = [Se_1^{n-1}]$. Тогда $[af_1^{n-1}] = [bg_1^{n-1}]$ и, учитывая, что φe_1^{n-1} — единичный сдвиг для G, ψf_1^{n-1} и ψg_1^{n-1} — левые единичные сдвиги в S, а следовательно, и в G, имеем: $a = [ae_1^{n-1}] = [af_1^{n-1}e_1^{n-1}] = [ag_1^{n-1}e_1^{n-1}] = [be_1^{n-1}] = b$. Поэтому $a\varphi f_1^{n-1} = a\varphi g_1^{n-1}$. Но $\varphi f_1^{n-1} = \varphi e_1^{n-2}[e_{n-1}f_1^{n-1}] = \varphi e_1^{n-2}f$, $\varphi g_1^{n-1} = \varphi e_1^{n-2}[e_{n-1}g_1^{n-1}] = \varphi e_1^{n-2}g$, где $f=[e_{n-1}f_1^{n-1}]$, $g=[e_{n-1}g_1^{n-1}]$. Тогда $[ae_1^{n-2}f] = [ae_1^{n-2}g]$ и $f = g$.

Докажем, наконец, что F сюръективно. Пусть $s \in S$, тогда существует последовательность g_1^{n-1} такая, что $[sg_1^{n-1}] = s$. Сдвиг φg_1^{n-1} — правый идемпотентный. В самом деле, легко увидеть, что $g_{n-1}=[g_{n-1}g_1^{n-1}]$ и для всех $t \in S$ $[tg_1^{n-1}] = [tg_1^{n-2}g_{n-1}g_1^{n-1}]$. Но тогда, учитывая, что $[se_1^{n-1}] \in G$, $\varphi g_1^{n-1} \in \Phi$, имеем $(se_1^{n-1}, \varphi g_1^{n-1}) F = [se_1^{n-1}g_1^{n-1}] = [sg_1^{n-1}] = s$.

5. Из соображений симметрии аналогичный результат имеет место и для левых n-групп.

Заметим, что теорема справедлива и для n-полугруппы S с однозначно разрешимым уравнением $[a_1^{i-1}xa_{i+1}^n] = b$. Но здесь конструкция тривиальна, так как S будет n-группой (см. [5]), а любая n-полугруппа i-х нулей одноэлементна.

Из п. 4 вытекает, в частности, что всякая правая n-группа — объединение своих попарно непересекающихся n-подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп.— М.: Мир, 1972.— Т. I. 285 с.
2. Трпеновски Б. За некои n-полугрупи што се унии од n-групи.— Билтен Друшт. мат. и физ., 1965, **16** с. 11—17.
3. Szasz C. Asupra axiomelor care stau la baza definiţiei unui n-grup.— Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Braşov, Fac. mes., 1965, N 7, c. 43—47.
4. Курош А. Г. Общая алгебра: Лекции 1969—1970 учебного года.— М.: Наука, 1974.— 158 с.
5. Слипенко А. К. Регулярные оперативы и идеальные эквивалентности.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 3, с. 218—221.

Донецкий
государственный университет

Поступила в редакцию
20.II 1979 г.