УДК 62—50

С. В. Зубарев

К аналогу условия Келли для систем гиперболических уравнений

В настоящей статье будут выведены некоторые условия оптимальности для особых распределенных управлений, т. е. таких, вдоль которых принцип максимума выполняется тривиально. Исследованию такой ситуации посвящены работы [1—7]. Метод, используемый здесь, является модификацией методов, изложенных в работах [8, 9] применительно к гиперболическим системам с граничными условиями Гурса.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой уравнений

$$u_{xt} = f(x, t, u', u'_x, u'_t, v) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = \varphi(t), \quad u|_{t=0} = \Psi(x) \tag{2}$$

в области $G: 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T$. Здесь $u = \{u_1, \ldots, u_n\}'$ — вектор-столбец с компонентами $u_1, \ldots, u_n$, u' — вектор-строка. Знак «$'$» обозначает транспонирование. Управляющая вектор-функция $v = (v_1, \ldots, v_r)$ принадлежит к классу кусочно-непрерывных функций и принимает значения в открытой области V из некоторого r-мерного евклидова пространства. Вектор-функция $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ предполагается достаточно гладкой по всем своим аргументам. Вектор-функции $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $\Psi = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ непрерывно дифференцируемы в области G.

Требуется минимизировать следующий функционал:

$$I[v] = \omega[u'(l, T)]. \tag{3}$$

Скалярная функция ω дважды непрерывно дифференцируема по векторному аргументу u'. Введем в рассмотрение также функцию

$$H(x, t, u', u'_x, u'_t, w', v) = w' f(x, t, u', u'_x, u'_t, v), \tag{4}$$

где $w(x, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial u_t}\right) \tag{5}$$

с граничными условиями Гурса:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{t=T} = -\left.\frac{\partial H}{\partial u_t}\right|_{t=T}, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x=l} = -\left.\frac{\partial H}{\partial u_x}\right|_{x=l}, \quad w(l, T) = -\frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

Пусть $v(x, t)$, $(x, t) \in G$, допустимое управление. Рассмотрим еще одно допустимое управление: $\bar{v} = v + \Delta v = v + \varepsilon \delta v(x, t)$, где $\varepsilon > 0$, а δv — некоторая кусочно-гладкая функция. Приращение функционала $\Delta I[\bar{v}] = I[\bar{v}] - I[v]$ при фиксированных прочих параметрах есть функция от ε. Если она допускает представление

$$\Delta I[v] = \varepsilon \delta I[v] + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 I[v] + o(\varepsilon^2), \tag{6}$$

где числа $\delta I[v]$ и $\delta^2 I[v]$ не зависят от ε, то $\delta I[v]$ и $\delta^2 I[v]$ называются соответственно первой и второй вариациями функционала $I[v]$. Далее обозначим через $u(x, t)$ и $\bar{u}(x, t) = u + \Delta u$ решения задачи (1)—(3), соответствующие управлениям $v(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$. Тогда согласно оценкам [10] существует представление $\Delta u(x, t) = \varepsilon \delta u(x, t) + o(\varepsilon)$.

Аналогично [11] получаем явные выражения для $\delta I[v]$ и $\delta^2 I[v]$, а также уравнение в вариациях:

$$\delta I[v] = -\int_0^T \int_0^l \frac{\partial H'(x, t, u', u_x', u_t', w', v)}{\partial v} \delta v dx dt, \tag{7}$$

$$\delta^2 I[v] = \delta u'(l, T) \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} \delta u(l, T) - \int_0^T \int_0^l \Big[\delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u + \delta u_x' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x^2} \delta u_x +$$
$$+ \delta u_t' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} \delta u_t + 2\delta u_x' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial u_t} \delta u_t' + 2\delta u_x' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial u} \delta u + 2\delta u_t' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial u} \delta u +$$
$$+ 2\delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} \delta v + 2\delta u_x' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} \delta v + 2\delta u_t' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \delta v + \delta v' \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \delta v \Big] dx dt, \tag{8}$$

$$\delta u_{xt} = \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial f}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial f}{\partial v} \delta v, \quad \delta u|_{x=0} = \delta u|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Из (6) следует, что на оптимальном управлении выполняются условия

$$\delta I[v] = 0, \quad \delta^2 I[v] \geqslant 0. \tag{10}$$

В дальнейшем будем рассматривать системы с правыми частями вида

$$f(x, t, u', u_x', u_t', v) = f_0(x, t, u', u_x', u_t') + v f_1(x, t, u', u_x', u_t') \tag{11}$$

со скалярной функцией v из некоторого открытого множества. Очевидно, что для таких систем условие Лежандра — Клебша не эффективно. Цель работы — получить на основе неотрицательности второй вариации необходимые условия оптимальности для систем (1) с правыми частями (11) для особых управлений, т. е. такие, вдоль которых выполняется тождество

$$\frac{\partial H(x, t, u', u_x', u_t', w', v)}{\partial v} \equiv 0. \tag{12}$$

Введем вариацию управления $\delta v(x, t)$ следующего вида:

$$\delta v = \begin{cases} v_1, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), & t \in [\eta, \eta + \varepsilon), \\ -v_1, & x \in [\xi + \varepsilon, \xi + 3\varepsilon), & t \in [\eta, \eta + \varepsilon), \\ v_1, & x \in [\xi + 3\varepsilon, \xi + 4\varepsilon), & t \in [\eta, \eta + \varepsilon), \\ -v_1, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), & t \in [\eta + \varepsilon, \eta + 3\varepsilon), \\ v_1, & x \in [\xi + \varepsilon, \xi + 3\varepsilon), & t \in [\eta + \varepsilon, \eta + 3\varepsilon), \\ -v_1, & x \in [\xi + 3\varepsilon, \xi + 4\varepsilon], & t \in [\eta + \varepsilon, \eta + 3\varepsilon), \\ v_1, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), & t \in [\eta + 3\varepsilon, \eta + 4\varepsilon), \\ -v_1, & x \in [\xi + \varepsilon, \xi + 3\varepsilon), & t \in [\eta + 3\varepsilon, \eta + 4\varepsilon), \\ v_1, & x \in [\xi + 3\varepsilon, \xi + 4\varepsilon), & t \in [\eta + 3\varepsilon, \eta + 4\varepsilon), \\ 0, & (x, t) \in G \setminus G_\varepsilon, \ G_\varepsilon: & [\xi, \xi + 4\varepsilon) [\eta, \eta + 4\varepsilon). \end{cases}$$

В силу единственности задачи Гурса из (9) следует, что при такой $\delta v(x, t)$ в области $G_1: [0, \xi] \times [0, T] \cup [0, l] \times [0, \eta]$, $\delta u(x, t) \equiv 0$ и $\delta u(\xi, t) = \delta u(x, \eta) = 0$. Подобно тому, как это делается в [8, 9, 11], убеждаемся, что на линии $x = \xi + 4\varepsilon$ при $t \in [\eta, \eta + \varepsilon)$ $\delta u(x, t) \sim \varepsilon^4$. Совершенно аналогично находим, что $\delta u(x, t) \sim \varepsilon^4$ на линии $x = \xi + 4\varepsilon$ при $t \in [\eta + \varepsilon, \eta + 3\varepsilon)$ и $t \in [\eta + 3\varepsilon, \eta + 4\varepsilon)$, а также $\delta u(x, t) \sim \varepsilon^4$ на линии $t = \eta + 4\varepsilon$ при $x \in [\xi, \xi + 4\varepsilon)$. Тогда $\delta u(x, t) \sim \varepsilon^4$ в области G_2. Производные δu_x и δu_t будут в этой области пропорциональны ε^3. Из этих соотношений следует, что первый член, входящий во вторую вариацию функционала будет пропорционален ε^8, а

$$\iint\limits_{G_2} \left[\delta u'_x \frac{\partial^2 H}{\partial u_x^2} \delta u_x + \delta u'_t \frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} \delta u_t + \delta u'_x \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial u_t} \delta u_t \right] dG_2 \sim \varepsilon^6,$$

$$\iint\limits_{G_2} \left[\delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial u_x} \delta u_x + \delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial u_t} \delta u_t \right] dG_2 \sim \varepsilon^7,$$

$$\iint\limits_{G_2} \delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u dG_2 \sim \varepsilon^8, \quad G_2 = G \setminus (G_1 \cup G_\varepsilon).$$

Тогда главные члены (порядка ε^5) будут содержаться в выражениях, входящих в $\delta^2 I[v]$, интегралы от которых берутся по области G_ε. Для вычисления интегралов по области G_ε применим упрощающие преобразования. Введем вспомогательные функции по следующим рекуррентным формулам:

$$\frac{\partial^2 q^i(x, t)}{\partial x \partial t} = q^{i-1}(x, t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad q^i|_{x=\xi} = q^i|_{t=\eta} = 0,$$

где $q^0 = \delta v(x, t)$ — исходная вариация управления. Решение уравнения (9) $\delta u(x, t)$ представим в виде

$$\delta u(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \left[a^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{i-j-1} q^i + b^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{i-j-1} q^i \right] + \Theta(x, t), \tag{13}$$

где $a^{ij} = a^{ij}(x, t)$, $b^{ij} = b^{ij}(x, t)$, $\Theta(x, t)$ — вектор-функции, подлежащие определению. Положим в этом представлении $n = 2$ и найдем члены, входящие в (8), порядка ε^4. Тогда $\delta u(x, t)$ имеет вид

$$\delta u(x, t) = a^{11} q^1 + a^{20} q_x^2 + b^{20} q_t^2 + \Theta(x, t). \tag{14}$$

Подставим (14) в уравнение в вариациях и приравняем члены с одинаковыми коэффициентами. В результате находим

$$a^{11} = f_1 \, (a^{11} = a^{10} + b^{10}), \; a_t^{11} + a^{20} = \frac{\partial f}{\partial u_x} a^{11}, \; a_x^{11} + b^{20} = \frac{\partial f}{\partial u_t} a^{11}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_t} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \Theta + \frac{\partial f}{\partial u} [a^{11} q^1 + a^{20} q_x^2 + b^{20} q_t^2] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u_x} [(a_x^{11} + b^{20}) q^1 + a_x^{20} q_x^2 + b_x^{20} q_t^2 + a^{20} q_{xx}^2] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u_t} [(a_t^{11} + a^{20}) q^1 + a_t^{20} q_x^2 + b_t^{20} q_t^2 + b^{20} q_{tt}^2] - [(a_{xt}^{11} + a_x^{20} + b_t^{20}) q^1 + a_{xt}^{20} q^2 +$$

$$+ b_{xt}^{20} q_t^2 + a_t^{20} q_{xx}^2 + b_x^{20} q_{tt}^2].$$

Функции q^1, q^2_{xx}, q^2_{tt} в области G_ε имеют порядок ε^2, следовательно, функция $\Theta(x, t)$ в области G_ε имеет порядок ε^4, а ее первые производные — порядок ε^3. Подставим (14) в (8) и выпишем главные по ε члены второй вариации функционала:

$$\delta^2 I[v] = -\iint_{G_\varepsilon} \Big\{ [a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x^2} a^{11} [q_x^1]^2 + [a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} a^{11} [q_t^1]^2 +$$

$$+ 2[a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial u_t} a^{11} q_x^1 q_t^1 + 2[a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} q^1 q^0 + 2[a_x^{11} + b^{20}]' \times$$

$$\times \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} q^1 q^0 + 2[a_t^{11} + a^{20}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} q^1 q^0 + 2[a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} q_x^1 q^0 +$$

$$+ 2[a^{11}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} q_t^1 q^0 + 2[a^{20}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} q_{xx}^2 q^0 +$$

$$+ 2[b^{20}]' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} q_{tt}^2 q^0 \Big\} dxdt.$$

Интегрированием по частям последних четырех членов с учетом свойства

$$q^1|_{x=\xi} = q^1|_{t=\eta} = q^1|_{x=\xi+4\varepsilon} = q^1|_{t=\eta+4\varepsilon} = q_x^1|_{t=\eta} = q_x^1|_{t=\eta+4+\varepsilon} =$$

$$= q_t^1|_{x=\xi} = q_t^1|_{x=\xi+4\varepsilon} = 0$$

добиваемся того, чтобы они содержали сомножителями $[q_x^1]^2$ и $[q_t^1]^2$, а в результате интегрирования 4—6-го членов получаем выражения, содержащие сомножителями $q_x^1 q_t^1$. Интегральные выражения, содержащие произведение $q_x^1 q_t^1$, обращаются в нуль. Таким образом в (8) останутся только те подынтегральные члены, которые имеют сомножителями $[q_x^1]^2$ и $[q_t^1]^2$. Так как область G_ε симметрична относительно переменных x и t, то

$$\iint_{G_\varepsilon} [q_x^1]^2 \, dxdt = \iint_{G_\varepsilon} [q_t^1]^2 \, dxdt = R > 0.$$

Окончательно находим

$$\delta^2 I[v] = -R \Big\{ (a^{11})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x^2} (a^{11}) + (a^{11})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} (a^{11}) - \frac{\partial}{\partial t} \Big[(a^{11})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} \Big] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \Big[(a^{11})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \Big] - 2(a^{20})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} - 2(b^{20})' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \Big\} \Big|_{t=\eta}^{x=\xi},$$

(ξ, η) — произвольная точка области G. Подставляя в это выражение соотношения (15) и используя неотрицательность второй вариации функционала, имеем

$$f' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x^2} f_1 - f_1' \frac{\partial}{\partial t} \Big[\frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} \Big] - 2 \Big[\frac{\partial^2 H}{\partial u_x \partial v} \Big]' \frac{\partial f}{\partial u_x} f_1 + \frac{\partial}{\partial t} f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial u_x} +$$

$$+ f_1 \frac{\partial^2 H}{\partial u_t^2} f_1 - f' \frac{\partial}{\partial x} \Big[\frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \Big] - 2 \Big[\frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \Big] \times$$

$$\times \frac{\partial f}{\partial u_t} f_1 + \frac{\partial}{\partial x} f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial u_t \partial v} \leqslant 0 \qquad (16)$$

для всех $(\xi, \eta) \in G$. Выражение (16) напоминает условие Келли для динамических систем, записанное в расширенной форме [8, 11]. Если вектор-функции f_0 и f_1 не зависят явно от x и t, то это неравенство можно записать в компактной форме:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\Delta \frac{\partial H}{\partial v}\right) \geqslant 0, \tag{17}$$

где Δ — оператор Лапласа по x и t. Если функция H зависит только от u и u_x или только от u и u_t, то условие (17) можно записать в виде двух неравенств:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial H}{\partial v}\right) \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial H}{\partial v}\right) \geqslant 0. \tag{19}$$

Аналогично можно построить условия оптимальности более высокого порядка, «увеличивая» вариацию управляющей функции, а для выделения главных членов во второй вариации функционала рассматривая большие n в (13). В заключение приведем пример.

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = v(x, t), \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} = -\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\right) + 3\,\frac{\partial u_3}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u^1}{\partial x} \tag{20}$$

в области G, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при граничных условиях: $u_1|_{x=0} = u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = u_2|_{x=0} = u_3|_{x=0} = u_3|_{t=0}$.

Требуется минимизировать функционал

$$I[v] = u_2(1, 1) + u_3(1, 1) \tag{21}$$

на управлениях $v = v(x, t)$ с ограничениями $|v| < 2$. Составим гамильтониан:

$$H = w_1 v - w_2\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\right) + 3\,\frac{\partial u_3}{\partial x}\right] + w_3\frac{\partial u_1}{\partial x}\,. \tag{22}$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{1x}}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2w_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - 1\right) - w_3\right], \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial x}\right|_{t=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial t}\right|_{x=1} = -\left.\frac{\partial H}{\partial u_{1x}}\right|_{x=1}, \quad w_1(1, 1) = 0; \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial t} = 0, \quad \left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{t=1} = \left.\frac{\partial w_2}{\partial t}\right|_{x=1} = 0, \quad w_2(1, 1) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial u_{3x}}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}[-3w_2], \quad \left.\frac{\partial w_3}{\partial x}\right|_{t=1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial w_3}{\partial t}\right|_{x=1} = 3w_2|_{x=1}, \quad w_3(1, 1) = -1.$$

Из двух последних уравнений находим w_2 и w_3: $w_2(x, t) = -1$, $w_3(x, t) = 2 - 3t$.

Вычислим особое управление. По определению (12) имеем $\frac{\partial H}{\partial v} = w_1 \equiv 0$. Дифференцируя это выражение по t и принимая во внимание (23), (24), получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = 2w_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - 1\right) - w_3 = 0.$$

Из первого уравнения системы (20) находим $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и подставляем в последнее равенство, в результате получаем интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно управляющей функции v. Решая это уравнение, определяем особое управление $v(x, t) = 3/2$. Проверим условие (18):

$$\frac{\partial H}{\partial v} = w_1, \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial w_1}{\partial t} = 2w_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - 1\right) - w_3,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial H}{\partial v} = 2w_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + 3 = 2w_2 v + 3; \quad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial t^2}\frac{\partial H}{\partial v} = 2w_2 = -2 < 0.$$

Следовательно, особое управление $v = 3/2$ не оптимально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами.— Управляемые системы. М., 1972, вып. 10, с. 27—34.
2. Ащепков Л. Т., Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса — Дарбу.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, **15**, № 5, с. 1157—1167.
3. Васильев О. В. К исследованию особого управления в одной системе с распределенными параметрами.— Управляемые системы. М., 1976, вып. 15, с. 3—15.
4. Васильев О. В. Об усилении необходимых условий оптимальности особых управлений.— В кн.: Методы оптимизации и исследование операций: Прикладная математика. Иркутск, 1976, с. 21—28.
5. Васильев О. В. Условия оптимальности особых управлений для одного класса систем с распределенными параметрами.— В кн.: Материалы Всесоюзного симпозиума по оптимальным управлениям и дифференциальным играм. Тбилиси: Мицниереба, 1977, с. 72—77.
6. Васильев О. В. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами.— В кн.: Прикладная математика. Новосибирск, 1978, с. 109—138.
7. Срочко В. А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами.— Сиб. мат. журн., 1976, **17**, № 5, с. 1108—1115.
8. Келли Г. Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации.— Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 8, с. 26—29.
9. Копп Р., Мойер Г. Необходимые условия оптимальности особых экстремалей.— Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 8, с. 84—91.
10. Егоров А. И. Оптимальные процессы с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, **29**, № 6, с. 1205—1260.
11. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М.: Наука, 1973.— 256 с.

Институт механики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.XI 1979 г.