УДК 531.382

*В. Н. Кошляков*

# Уравнения тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в унитарных и эрмитовых матрицах

В данной работе, являющейся продолжением статей автора [1, 2], применен аппарат унитарных и эрмитовых матриц к задаче движения твердого тела около неподвижной точки.

**1.** В работе [2] получены уравнения тяжелого твердого тела с произвольным распределением масс, вращающегося около неподвижной точки:

$$2ABC\ddot{\alpha} + BC[(C-B)qr - M_x]\beta i + CA[(A-C)rp - M_y]\beta +$$
$$+ AB[(B-A)pq - M_z]\alpha i + 2ABC(\dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma})\alpha = 0,$$
$$2ABC\ddot{\beta} + BC[(C-B)qr - M_x]\alpha i - CA[(A-C)rp - M_y]\alpha -$$
$$- AB[(B-A)pq - M_z]\beta i + 2ABC(\dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma})\beta = 0, \quad (1)$$
$$2ABC\ddot{\gamma} + BC[(C-B)qr - M_x]\delta i + CA[(A-C)rp - M_y]\delta +$$
$$+ AB[(B-A)pq - M_z]\gamma i + 2ABC(\dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma})\gamma = 0,$$
$$2ABC\ddot{\delta} + BC[(C-B)qr - M_x]\gamma i - CA[(A-C)rp - M_y]\gamma -$$
$$- AB[(B-A)pq - M_z]\delta i + 2ABC(\dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma})\delta = 0.$$

Здесь $A$, $B$, $C$ — моменты инерции тела относительно связанных с ним подвижных осей, совпадающих с направлениями главных осей инерции для неподвижной точки; $M_x$, $M_y$, $M_z$ — проекции на оси $x$, $y$, $z$ момента силы тяжести; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — параметры Кэйли—Клейна, выражающиеся через параметры Родрига — Гамильтона $\lambda_s$ $(s = 0, 1, 2, 3)$ следующим образом:

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3,\ \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1,\ \gamma = \lambda_2 + i\lambda_1,\ \delta = \lambda_0 - i\lambda_3. \quad (2)$$

Имеем

$$qr = 2i(\alpha\dot{\delta} - \gamma\dot{\beta})[(\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta}) - (\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})],$$
$$rp = -2(\alpha\dot{\delta} - \gamma\dot{\beta})[(\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta}) + (\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})],$$
$$pq = i[(\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta})^2 - (\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})^2], \quad (3)$$

а также

$$M_x = -mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)y_c + (\alpha\gamma + \beta\delta)z_c i], \quad M_y = mg[(\alpha\delta + \beta\gamma)x_c -$$
$$-(\beta\delta - \alpha\gamma)z_c], \quad M_z = mg[(\beta\delta - \alpha\gamma)y_c + (\alpha\gamma + \beta\delta)x_c i]. \quad (4)$$

Здесь $mg$ — сила тяжести, $x_c$, $y_c$, $z_c$ — координаты центра масс тела в системе подвижных осей.

Параметры $\lambda_s$ и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, соответственно, связаны между собой соотношениями

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{5}$$

использованными при выводе уравнений (1).

2. Уравнения (1) с учетом формул (3) и (4) могут быть представлены в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} & \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} & \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = 0, \tag{6}$$

где

$$p_{11} = \dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma} + \varepsilon\,[(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})^2 - (\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta})^2] - \frac{M_z}{2C}\, i,$$

$$p_{12} = (\alpha\dot{\delta} - \gamma\dot{\beta})\,[\nu\,(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma}) - \mu\,(\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta})] - \frac{M_x}{2A}\, i + \frac{M_y}{2B}, \tag{7}$$

$$p_{21} = (\alpha\dot{\delta} - \gamma\dot{\beta})\,[\mu\,(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma}) - \nu\,(\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta})] - \frac{M_x}{2A}\, i - \frac{M_y}{2B},$$

$$p_{22} = \dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma} - \varepsilon\,[(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma})^2 - (\beta\dot{\delta} - \delta\dot{\beta})^2] + \frac{M_z}{2C}\, i,$$

причем

$$\nu = \frac{C-B}{A} + \frac{A-C}{B}, \quad \mu = \frac{C-B}{A} - \frac{A-C}{B}, \quad \varepsilon = \frac{B-A}{2C}. \tag{8}$$

Матрица $U \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ унитарна.

Действительно, в силу (2) имеем $\alpha^* = \delta$, $\beta^* = -\gamma$, $\gamma^* = -\beta$, $\delta^* = \alpha$, где звездочкой обозначены сопряженные величины. Обозначив через $U^+$ матрицу, эрмитово сопряженную с матрицей $U$, и учитывая второе из соотношений (5), имеем

$$UU^+ = U^+U = E, \quad U^+ = U^{-1}, \tag{9}$$

где $E$ — единичная матрица.

Воспользуемся далее легко проверяемым представлением любой матрицы размера $2 \times 2$ в двумерном пространстве посредством линейной комбинации вида [3]

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(c+b)\,\sigma_1 + \frac{1}{2}(c-b)\,\sigma_2 + \frac{1}{2}(a-d)\,\sigma_3 + \frac{1}{2}(a+d)\,E, \tag{10}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Систему (1) можно представить в форме матричного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2U}{dt^2} + UP = 0, \tag{12}$$

где

$$P = (\dot{\alpha}\dot{\delta} - \dot{\beta}\dot{\gamma})\,E + \frac{C-B}{A}\,(\alpha\dot{\delta} - \gamma\dot{\beta})\,[(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma}) + (\delta\dot{\beta} - \beta\dot{\delta})]\,\sigma_1 +$$

$$+\frac{C-A}{B}(\alpha\dot{\delta}-\gamma\dot{\beta})[(\gamma\dot{\alpha}-\alpha\dot{\gamma})-(\delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta})]\sigma_2+$$

$$+\frac{B-A}{2C}[(\gamma\dot{\alpha}-\alpha\dot{\gamma})^2-(\beta\dot{\delta}-\delta\dot{\beta})^2]\sigma_3-\frac{M_x}{2A}i\sigma_1-$$

$$-\frac{M_y}{2B}\sigma_2-\frac{M_z}{2C}i\sigma_3. \qquad (13)$$

3. Слагаемые, образующие матрицу (13), в свою очередь могут быть выражены через матрицы $U$, $U^+$, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dU^+}{dt}$ и $\sigma_s$ *.

Действительно, с учетом соотношений (9) имеем

$$\dot{U}\dot{U}^+=\begin{bmatrix}\dot{\alpha} & \dot{\beta}\\ \dot{\gamma} & \dot{\delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\delta} & -\dot{\beta}\\ -\dot{\gamma} & \dot{\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\dot{\delta}-\dot{\beta}\dot{\gamma} & 0\\ 0 & \dot{\alpha}\dot{\delta}-\dot{\beta}\dot{\gamma}\end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Отсюда

$$(\dot{\alpha}\dot{\delta}-\dot{\beta}\dot{\gamma})E=\dot{U}\dot{U}^+. \qquad (15)$$

Далее,

$$U^+\dot{U}=\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha} & \dot{\beta}\\ \dot{\gamma} & \dot{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma} & \delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta}\\ -\dot{\alpha}\gamma+\alpha\dot{\gamma} & -\gamma\dot{\beta}+\alpha\dot{\delta}\end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Затем

$$\sigma_3U^+\dot{U}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma} & \delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta}\\ -\dot{\alpha}\gamma+\alpha\dot{\gamma} & -\gamma\dot{\beta}+\alpha\dot{\delta}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma} & \delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta}\\ \dot{\alpha}\gamma-\alpha\dot{\gamma} & \gamma\dot{\beta}-\alpha\dot{\delta}\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

$$U^+\dot{U}\sigma_3=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma} & \delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta}\\ -\dot{\alpha}\gamma+\alpha\dot{\gamma} & -\gamma\dot{\beta}+\alpha\dot{\delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma} & -\delta\dot{\beta}+\beta\dot{\delta}\\ -\dot{\alpha}\gamma+\alpha\dot{\gamma} & \gamma\dot{\beta}-\alpha\dot{\delta}\end{bmatrix}.$$

Отсюда, учитывая соотношение [4]

$$\dot{\alpha}\delta-\beta\dot{\gamma}+\alpha\dot{\delta}-\dot{\beta}\gamma\equiv 0, \qquad (18)$$

получаем

$$-2(\alpha\dot{\delta}-\dot{\beta}\gamma)E=\sigma_3U^+\dot{U}+U^+\dot{U}\sigma_3. \qquad (19)$$

Аналогично имеем

$$-[(\gamma\dot{\alpha}-\alpha\dot{\gamma})-(\dot{\beta}\delta-\beta\dot{\delta})]E=\sigma_1U^+\dot{U}+U^+\dot{U}\sigma_1, \qquad (20)$$

$$[(\gamma\dot{\alpha}-\alpha\dot{\gamma})+(\delta\dot{\beta}-\beta\dot{\delta})]E=\sigma_2U^+\dot{U}+U^+\dot{U}\sigma_2. \qquad (21)$$

* В дальнейшем для удобства записи будем обозначать производные от соответствующих матриц по времени точкой сверху, как это принято для скалярных величин. Например, $\dot{U}^+$ будет обозначать $\frac{d}{dt}(U^+)\equiv\left\|\frac{du_{ik}^+}{dt}\right\|$.

Обратимся, наконец, к трем последним членам матричного представления (13), где $M_x$, $M_y$ и $M_z$ определяются согласно формулам (4). Имеем

$$U^{+}\sigma_3 U=\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\delta+\beta\gamma & 2\beta\delta\\ -2\alpha\gamma & -(\alpha\delta+\beta\gamma)\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Далее,

$$U^{+}\sigma_3 U\sigma_3=\begin{bmatrix}\alpha\delta+\beta\gamma & -2\beta\delta\\ -2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma\end{bmatrix},\quad \sigma_3 U^{+}\sigma_3 U=\begin{bmatrix}\alpha\delta+\beta\gamma & 2\beta\delta\\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma\end{bmatrix}. \tag{23}$$

Отсюда

$$(\alpha\delta+\beta\gamma)E=\frac{1}{2}(U^{+}\sigma_3 U\sigma_3+\sigma_3 U^{+}\sigma_3 U). \tag{24}$$

Аналогично получаем

$$(\beta\delta-\alpha\gamma)E=\frac{1}{2}(U\sigma_1 U^{+}\sigma_3+\sigma_3 U\sigma_1 U^{+}),$$

$$(\beta\delta+\alpha\gamma)E=\frac{1}{2}(U\sigma_2 U^{+}\sigma_3+\sigma_3 U\sigma_2 U^{+}). \tag{25}$$

Заметим, что в выражения (24) и (25) входят спиновые матрицы $\sigma_s$, подвергнутые преобразованию подобия.

Полагая

$$\sigma_1'=U\sigma_1 U^{+},\quad \sigma_2'=U\sigma_2 U^{+},\quad \sigma_3'=U^{+}\sigma_3 U, \tag{26}$$

получаем

$$(\alpha\delta+\beta\gamma)E=\frac{1}{2}(\sigma_3'\sigma_3+\sigma_2\sigma_3'),\quad (\beta\delta-\alpha\gamma)E=\frac{1}{2}(\sigma_1'\sigma_3+\sigma_3\sigma_1'),$$

$$(\beta\delta+\alpha\gamma)E=\frac{1}{2}(\sigma_2'\sigma_3+\sigma_3\sigma_2'). \tag{27}$$

При этом матрицы $\sigma_1'$ и $\sigma_3'$ будут эрмитовыми.

Таким образом, матрица $P$ в уравнении (12) может быть представлена в виде суммы семи матриц $P_i\ (i=1, 2, \ldots, 7)$ вида

$$P_1=\dot{U}U^{+},\quad P_2=\frac{B-C}{2A}(\sigma_3\Lambda+\Lambda\sigma_3)(\sigma_2\Lambda+\Lambda\sigma_2)\sigma_1,$$

$$P_3=\frac{C-A}{2B}(\sigma_3\Lambda+\Lambda\sigma_3)(\sigma_1\Lambda+\Lambda\sigma_1)\sigma_2,$$

$$P_4=\frac{A-B}{2C}(\sigma_1\Lambda+\Lambda\sigma_1)(\sigma_2\Lambda+\Lambda\sigma_2)\sigma_3,$$

$$P_5=\frac{mg}{4A}[(\sigma_3'\sigma_3+\sigma_3\sigma_3')y_c i-(\sigma_2'\sigma_3+\sigma_3\sigma_2')z_c]\sigma_1, \tag{28}$$

$$P_6=\frac{mg}{4B}[(\sigma_1'\sigma_3+\sigma_3\sigma_1')z_c-(\sigma_3'\sigma_3+\sigma_3\sigma_3')x_c]\sigma_2,$$

$$P_7=\frac{ng}{4C}[(\sigma_2'\sigma_3+\sigma_3\sigma_2')x_c-(\sigma_1'\sigma_3+\sigma_3\sigma_1')y_c i]\sigma_3,$$

где для краткости обозначено

$$\Lambda=U^{+}\dot{U}. \tag{29}$$

4. Остановимся на модификации матричного дифференциального уравнения (12). Для этого нам понадобится каноническая (диагональная) форма матрицы $U$.

Обозначив ее через $U_k$, получим

$$U_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha + \delta + \sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}i & 0 \\ 0 & \alpha + \delta - \sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}\,i \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Эта же матрица, выписанная в параметрах Родрига-Гамильтона, будет иметь вид

$$U_k = \begin{bmatrix} \lambda_0 + \sqrt{1-\lambda_0^2}\,i & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \sqrt{1-\lambda_0^2}\,i \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Связь между $U$ и $U_k$ устанавливается преобразованием подобия. Имеем

$$U_k = V^+UV, \quad U = VU_kV^+. \tag{32}$$

Составляющие $v_{ik}$ матрицы $V$ находятся по известным правилам нахождения составляющих собственных векторов [5]. В нашем случае эта процедура приводит к двум однородным системам алгебраических уравнений с определителем, равным нулю. Пользуясь параметрами Родрига—Гамильтона, имеем

$$(\lambda_0 + i\lambda_3 - \chi_1)\,v_{11} + (-\lambda_2 + i\lambda_1)\,v_{21} = 0, \;\; (\lambda_2 + i\lambda_1)\,v_{11} + \\ + (\lambda_0 - i\lambda_3 - \chi_1)\,v_{21} = 0, \tag{33}$$

и, соответственно,

$$(\lambda_0 + i\lambda_3 - \chi_2)\,v_{12} + (-\lambda_2 + i\lambda_1)\,v_{22} = 0,$$
$$(\lambda_2 + i\lambda_1)\,v_{12} + (\lambda_0 - i\lambda_3 - \chi_2)\,v_{22} = 0, \tag{34}$$

где

$$\chi_1 = \lambda_0 + \sqrt{1-\lambda_0^2}\,i, \quad \chi_2 = \lambda_0 - \sqrt{1-\lambda_0^2}\,i. \tag{35}$$

Компоненты $v_{ik}$ собственного вектора подчиним условиям унитарности, согласно которым сумма квадратов модулей элементов каждого столбца матрицы $V$ должна равняться единице, а сумма произведений элементов некоторого столбца на величины, сопряженные с соответствующими элементами другого столбца, должна обращаться в нуль [5].

Обращаясь сначала к системе (33), примем $v_{11} = \varkappa$, где $\varkappa$ — некоторое произвольное число. Далее, имеем

$$v_{21} = -\frac{(\lambda_2 + i\lambda_1)\,\varkappa}{\lambda_0 - i\lambda_3 - \chi_1} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 i)\,\varkappa}{\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2}}. \tag{36}$$

Отсюда

$$|v_{21}| = \frac{\varkappa\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2}}. \tag{37}$$

Выбираем число $\varkappa$ из условия

$$|v_{11}|^2 + |v_{21}|^2 = 1. \tag{38}$$

Получаем

$$\varkappa = \frac{\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2}}{\sqrt{(\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2})^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}}. \tag{39}$$

Таким образом,

$$v_{11} = \frac{1}{\Delta}(\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2}), \quad v_{21} = \frac{1}{\Delta}(\lambda_1 - \lambda_2 i), \tag{40}$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\lambda_3 + \sqrt{1-\lambda_0^2})^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \tag{41}$$

Оперируя с системой (34), имеем

$$v_{12} = -\frac{1}{\Delta}(\lambda_1 + i\lambda_2) = -v_{21}^*, \quad v_{22} = v_{11}. \tag{42}$$

Вводя обозначения

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_3 + \sqrt{1 - \lambda_0^2}\right), \quad b = \frac{1}{\Delta}(\lambda_1 + i\lambda_2), \tag{43}$$

получаем

$$V = \begin{bmatrix} a & -b \\ b^* & a \end{bmatrix}. \tag{44}$$

При этом имеет место условие $V^{-1} = V^+$, т. е. матрица является унитарной

Полагая

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_3 + \sqrt{1 - \lambda_0^2}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \tag{45}$$

матрицу $V$ можно представить в виде

$$V = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -e^{i\theta}\sin\varphi \\ e^{-i\theta}\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{46}$$

**5.** Обратимся к матричному уравнению (12) и перейдем в нем к диагональной матрице (30), воспользовавшись преобразованием (32).

Получим уравнение вида

$$\ddot{U}_k v^+ + 2V^+\dot{V}\dot{U}_k V^+ + 2\dot{U}_k\dot{V}^+ + V^+\ddot{V}U_k V^+ +$$

$$+ 2V^+\dot{V}U_k\dot{V}^+ + U_k\ddot{V}^+ + U_k V^+ P = 0. \tag{47}$$

Это уравнение можно упростить, если ввести матрицы $T_1$, $T_2$ и $T_3$, положив

$$T_1 = \begin{bmatrix} a\dot{a} + b\dot{b}^* & (b\dot{a} - a\dot{b})\,\dot{\chi}_2\dot{\chi}_1^{-1} \\ (a\dot{b}^* - b^*\dot{a})\,\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2^{-1} & a\dot{a} + b^*\dot{b} \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} a\ddot{a} + b\ddot{b}^* & (b\ddot{a} - a\ddot{b})\,\chi_2\chi_1^{-1} \\ (a\ddot{b}^* - b^*\ddot{a})\,\chi_1\chi_2^{-1} & a\ddot{a} + b^*\ddot{b} \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} a\dot{a} + b\dot{b}^* & (b\dot{a} - a\dot{b})\,\chi_2\chi_1^{-1} \\ (a\dot{b}^* - b^*\dot{a})\,\chi_1\chi_2^{-1} & a\dot{a} + b^*\dot{b} \end{bmatrix},$$

где звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины, а $\chi_1$ и $\chi_2$ — составляющие диагональной матрицы (31), определяющиеся формулами (35).

Учитывая соотношения

$$V^+\dot{V}\dot{U}_k = \dot{U}_k T_1, \quad V^+\ddot{V}U_k = U_k T_2, \quad V^+\dot{V}U_k = U_k T_3 \tag{49}$$

и умножая все члены уравнения (47) справа на матрицу $V$, получаем

$$\ddot{U}_k + \dot{U}_k Q + U_k R = 0, \tag{50}$$

где

$$Q = 2(T_1 + \dot{V}^+ V), \quad R = T_2 + 2T_3\dot{V}^+ V + \ddot{V}^+ V + V^+ P V. \tag{51}$$

Введем подстановку

$$U_k = e^{iZ}. \tag{52}$$

Поскольку матрица $U_k$ диагональна, то эрмитова матрица $Z$ по свойству логарифмической функции от матрицы оказывается также диагональной и, следовательно, будет коммутировать со своей производной [6].

Относительно матрицы $Z$ получим уравнение вида

$$i\ddot{Z} - \dot{Z}^2 + i\dot{Z}Q + R = 0. \tag{53}$$

Если положить $i\dot{Z} = W$, то это уравнение можно представить в форме матричного уравнения Риккати

$$\dot{W} + W^2 + WQ + R = 0. \tag{54}$$

Здесь можно усмотреть некоторую аналогию с кинематической задачей Дарбу определения положения тела по заданной угловой скорости. Эта задача, как известно, сводится к квадратурам, если известно одно частное решение скалярного уравнения Риккати [4]

$$\dot{z} = \frac{q - ip}{2} - izr + \frac{q + ip}{2} z^2, \tag{55}$$

где $p$, $q$, $r$ — проекции угловой скорости тела на оси ортогонального трехгранника, связанного с телом; $p$, $q$, $r$ полагаются известными функциями времени.

Полученное нами матричное уравнение (54) применительно к рассматриваемой динамической задаче оказывается более сложным в сравнении с уравнением (55), поскольку матрицы $Q$ и $R$, имеющие нелинейную структуру, зависят не только от времени, но и от параметров $\lambda_s$ и их производных (а следовательно, и от параметров Кэйли — Клейна и их производных).

При дальнейшем аналитическом рассмотрении данной задачи можно, по-видимому, использовать применительно к исходной системе (1) подстановки вида [1, 2]

$$\alpha' = \alpha \cos\varphi - \delta \sin\varphi e^{i\theta}, \quad \beta' = \beta \cos\varphi - \gamma \sin\varphi e^{i\theta},$$

$$\delta' = \alpha \sin\varphi e^{-i\theta} + \delta \cos\varphi, \quad \gamma' = \beta \sin\varphi e^{-i\theta} + \gamma \cos\varphi, \tag{56}$$

где $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ — некоторые новые переменные.

Подстановки (56) вытекают из структуры унитарной матрицы (46).

**6.** Заметим, что уравнение (12) представляет, на наш взгляд, определенные удобства для применения машинного счета в силу стабильной структуры матриц $P_i$, определяющихся формулами (28). Обстоятельства, связанные, например, с распределением масс, отражены в названных матрицах только в виде соответственных множителей, не влияющих на симметричную структуру самих матриц $P_i$.

Машинный счет удобнее, по-видимому, вести в действительных параметрах Родрига—Гамильтона, матричные уравнения для которых, соответствующие уравнению (12), нетрудно получить.

По определению параметров Родрига — Гамильтона имеем

$$U \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{bmatrix} = U_1 + iU_2, \tag{57}$$

где

$$U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -\lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Соответственно имеем

$$U^{+}=U_1^{+}-iU_2, \tag{59}$$

где

$$U_1^{+}=U_1^{T}=\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_0 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Поскольку все элементы матрицы $U_1$ действительны, то матрица $U_1^{+}$, сопряженная с $U_1$ по Эрмиту, будет совпадать с транспонированной матрицей $U_1^{T}$.

Поскольку все слагаемые, составляющие матрицу (13), выражаются через матрицы $U$, $U^{+}$, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dU^{+}}{dt}$ и $\sigma_s$, то, пользуясь формулами (57)—(60), получим, что матрица $P$ может быть представлена в виде

$$P=S+iT, \tag{61}$$

где матрицы $S$ и $T$ окажутся действительными. При этом каждая из них, в соответствии с формулами (28), представит сумму семи действительных матриц.

Таким образом, вместо одного уравнения (12) получим систему из двух матричных уравнений вида

$$\frac{d^2U_1}{dt^2}+U_1S-U_2T=0, \quad \frac{d^2U_2}{dt^2}+U_2S+U_1T=0, \tag{62}$$

причем, как уже отмечалось, $S=\sum_{i=1}^{7} S_i$, $T=\sum_{i=1}^{7} T_i$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Кошляков В. Н. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— Укр. мат. журн., 1973, **25**, № 5, с. 677—681.
2. Кошляков В. Н. О применении параметров Родрига—Гамильтона и Кэйли—Клейна к задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 2, с. 179—187.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.— М. : Физматгиз, 1973.— 319 с.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М. : Физматгиз, 1961.— 824 с.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— 4-е изд.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 335 с.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Гостехиздат, 1953.— 491 с.



Институт математики
АН УССР



Поступила в редакцию
1.II 1980 г.